УДК 517.53

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ЛІУВІЛЛЯ

І. Д. Прокопець, О. Д. Трофименко

Анотація. В даній роботі представлена теорема Ліувілля і її доведення, як важливий елемент в дослідженні цілих функцій. Також наведено інтерпретацію даної теореми через функцію Бесселя.
Ключові слова: теорема Ліувілля, ряд Тейлора, ряд Лорана, обмежена функція, ціла функція.

Вступ. Перші докази нерозв’язності деяких рівнянь в квадратурах і в елементарних функціях були отримані в першій половині XIX ст. Жозефом Ліувіллем. Пізніше П. Л. Чебишев, Д. Д. Мордухай-Болотовський, А. Островський, Дж. Рітт, Дж. Давенпорт, М. Розенліхт, М. Зінгер та багато інших розвинули результати Ж. Ліувілля. Теорія Ліувілля дає відповіді на наступні питання: 1) за яких умов невизначений інтеграл від елементарної функції є елементарною функцією? 2) за яких умов можливо представити рішення лінійного диференціального рівняння, коефіцієнти якого – раціональні функції?

В 1833 р. Ж. Ліувіль вивів перші приклади елементарних функцій, інтеграли від яких не являється елементарними, і довів теорему, за допомогою якої можна створювати інші приклади подібних функцій. Розв’язати дану задачу вдалося, в основному, завдяки вдало сформульованому понятті елементарної функції, а також завдяки можливості виразити тригонометричні функції через експоненту та логарифм.

Проілюструємо доведення теореми Ліувілля про обмежені цілі аналітичні функції.

Означення. Функція $f(z)$, регулярна на всій множині комплексних чисел називається цілою. Розкладемо цілу функцію $f(z)$ в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Цей ряд збіжний при всіх z і, відповідно, являється рядом Лорана для функції в околі нескінченно віддалено точки.

Якщо ціла функція $f(z)$ є регулярною в точці $z \to \infty$, тоді $f(z)$ є аналітичною. Таким чином, єдиний клас аналітичних функцій, які не мають особливих точок в розширеній площині комплексних чисел - це константи.

Для доведення знадобиться нерівність Коші для коефіцієнтів ряду Лорана.

Теорема. Нехай функція $f(z)$ регулярна в кільці $D: \rho_0 < |z-a| < R_0$. Тоді коефіцієнти ряду Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-a)^n$$

для функції $f(z)$ в кільці D задовольняють нерівності

$$|c_n| \le \frac{M}{R^n}, n \in \mathbb{Z},$$

де $M = \max_{z \in \gamma_R} f(z), \gamma_R: |z-a| = R,\ \rho_0 < R < R_0$.

Дана нерівність називається нерівністю Коші для коефіцієнту ряду Лорана.

Доведення. Функція $f(z)$, регулярна в кільці $D: \rho < |z-a| < R$, може бути представлена в цьому кільці збіжним рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, (z-a)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - a| = R_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} d\xi$$

де $\rho < R_1 < R,\ n \in \mathbb{Z}$ звідси маємо:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - a| = R_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)} d\xi \leq \frac{M}{2\pi R^{n+1}} \oint_{|\xi - a| = R_1} 1 \, d\xi = \frac{M}{R^n}$$

Теорема (Ліувілля). Нехай ціла функція

$$f(z) = \sum_{j \leq k}^{\infty} c_k \, z^k$$

задовольняє в області $|z| < R$ наступні нерівності

$$f(z) \leq c|z|^k,$$

де $|z| \to \infty$, $c > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$

Тоді $f(z)$ - поліном ступеня не вище k.

Доведення. Розглянемо ряд

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

для якого

$$c_n = a_n + i b_n,\ \ z = R\, e^{i\varphi},\ \ R = |z|,\ \ \varphi = \arg z.$$

Представимо n-тий елемент ряду:

$$(a_n + i b_n)\left(R\, e^{i\varphi}\right)^n = (a_n + i b_n) R^n (\cos n\varphi + \sin n\varphi) =$$
$$= (a_n R^n \cos n\varphi - b_n R^n \sin n\varphi) + i(b_n R^n \cos n\varphi + a_n R^n \sin n\varphi)$$

Звідси маємо

$$Re\, f = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \, (a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi)$$

$$Im\, f = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \, (b_n \cos n\varphi + a_n \sin n\varphi)$$

Необхідно довести, що $a_n = b_n = 0$, при $n > k, n > 0$.

Розглянемо:

$$R^n a_n^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[(Re\, f)\left(R\, e^{i\varphi}\right) \cos n\varphi\right] d\varphi$$

$$R^n a_n \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|(Re\, f)\left(R\, e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[(Re\, f)\left(R\, e^{i\varphi}\right) + (Re\, f)\left(R\, e^{i\varphi}\right)\right] d\varphi -$$
$$- \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (Re\, f)\left(R\, e^{i\varphi}\right) d\varphi$$

Оскільки

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (Re\, f)\left(R\, e^{i\varphi}\right) d\varphi = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} R^n \, (a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi) = \begin{cases} -2a_0, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

тоді можна стверджувати, що

$$R^n a_n \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left|(Re\, f)\left(R\, e^{i\varphi}\right)\right| + (Re\, f)\left(R\, e^{i\varphi}\right)\right] d\varphi \le \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(Re\, f)\left(R\, e^{i\varphi}\right) d\varphi \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} MR^k \int_{-\pi}^{\pi} 1\, d\varphi = 4MR^k$$

Звідси маємо, що

$$|a_n| \le 4MR^{k-n}$$

Аналогічно для $|b_n|$.

Оскільки $n > k$ і R можна спрямувати на нескінченність, отримаємо $a_n = b_n = 0$ та $a_n + ib_n = c_n = 0$

Отже, $c_{k+1} = c_{k+2} = \ldots = 0$, тобто $f(z)$ - поліном степеню не вище k.

Наслідок. Якщо ціла функція $f(z)$ обмежена у всій комплексній площині, то вона є сталою: $f(z) \equiv const$.

Означення. Нехай $J_v(z)$ – функція Бесселя першого роду порядку v

$$J_v(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+v+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+v}$$

де Г – гама-функція.

Для $\frac{J_v(z)}{z^v}$ ряд збіжний абсолютно і рівномірно при зміні z і v в довільній обмежені області. Розглядаємо випадок, коли індекс v - ціле число та незалежна зміна - $z > 0$.

Теорема. Нехай v - ціле число, $\{\lambda\}_{n=1}^{\infty}$- послідовність попарно різних додатних чисел, що прямують до нескінченності.

Також нехай

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_n(\lambda_n x), \qquad x > 0, c_n \epsilon\, \mathbb{C}$$

де

$$\sum_{\text{т}=1}^{\infty} \frac{|\text{c}_\text{т}|}{\sqrt{\lambda_n}} < \infty$$

Тоді, якщо

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} f(x) = 0,$$

то

$$f(x) \equiv 0.$$

Висновки. Таким чином, у роботі розглянуто два паралельні підходи для доведення узагальненої теореми Ліувілля із акцентом на оцінці коефіцієнту ряду Лорана. Особливу увагу приділено нерівності Коші для ряду Лорана розкладання функції. Подібний підхід поклав початок іншим напрямкам: з розділів геометрії, топології, фізики, а питання властивості Ліувілля для аналітичних функцій цікаво розглядати для різних розкладів відповідної функціїї.

Abstract. The Liouville’s theorem and its proof as an important element in the study of entire functions are present in this paper. An interpretation of this theorem through the Bessel function is also given.

Keywords: Liouville’s theorem, Taylor series, Laurent series, bounded function, entire function.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Maxwell Rosenlicht The American Mathematical Monthly, Vol. 79, No. 9. (Nov., 1972), pp. 963–972.
2. Кадець В. М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Львів: Серія «Університетська бібліотека», 2012. 590 с.
3. Trofymenko O. Convolution equations and mean value theorems for solutions of linear elliptic equations with constant coefficients in the complex plane. 2018. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. ol. 229, № 1. P. 96–107.
4. Гольберг А. А., Шеремета М. М., Заболоцький М. В., Скасків О. Б. Комплексний аналіз. Львів, 2020. 204 с.
5. Heyer H. The Liouville property for harmonic functions on groups and hypergroups. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2017. Vol. 23. N 1. P. 3–25.
6. Maxwell Alexander. Rosenlicht Liouville's theorem on functions with elementary integrals. 1968. Vol. 24, No. 1. P.153–161.

УДК [007:629.331]

ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ АВТОТРАНСПОРТНОГО ПІДПРИЄМСТВА ДТЕК ЛАДИЖИНСЬКА ТЕС

М. А. Скрильова, О. М. Анісімова

Анотація. У статті розглянуто актуальні проблеми використання комунікаційних технологій автотранспортного підприємства ДТЕК Ладижинська ТЕС. Запропоновані заходи щодо вдосконалення комунікаційного механізму ДТЕК Ладижинської ТЕС мають позитивно вплинути на роботу керівників та працівників, покращити мікроклімат на підприємстві.

Ключові слова: комунікаційний процес, автотранспортне підприємство, комунікаційні технології, оцінка, ефективність.

Постановка проблеми. Важливим аспектом діяльності підприємств не залежно від його розміру є організація комунікаційного процесу для забезпечення передачі і розуміння інформації. У автомобільній сфері останнім часом виникає велика проблема щодо організації якісного спілкування. Донесення інформації повинне бути послідовним, здійснюватися згідно існуючим механізмом та системою комунікації на підприємстві. Також невід'ємним елементом є організація системи зворотнього зв'язку, саме тоді комунікацію можна вважати ефективною. Мінімізація шумів дозволить усім співробітникам отримувати інформацію, оперативно реагувати та мати змогу приймати відповідні управлінські рішення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження комунікацій на рівні потенціалу організації представлені у працях: Ж. Л. Крисько [2], Н. Л. Гавкалова [6], В. Я. Горфинкель., В. В. Гришина та інших. Питанням оптимізації комунікаційного процесу присвячено роботи О. М. Лозовського, Д. М Колісник [1]. Теоретичні аспекти комунікацій були розглянуто у роботах В. І. Борщ [4], Н. В. Валькова [5], О. М. Анісімової, Л. А. Ковальської, Г. П. Лукаш, О. В. Прігунова, О. С. Щербіни, Т. М. Яворської [7].

Невирішені складові загальної проблеми. Не зважаючи на підвищення комунікаційних процесів, більшість досліджень є вузькоспеціалізованими та описують його лише в теоретичному аспекті. Особливості використання комунікаційних процесів саме на автоколоні є малодослідженими. У зв'язку з інформатизацією суспільства, підвищенням ролі Інтернету в діяльності підприємств, використання інноваційного інструменту – комунікація є актуальною у всіх сферах діяльності.