производительности. Мощность и емкость гликолитического механизма энергообеспечения и устойчивость к гипоксии также понижены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kagon J. Galens prophecy: Temperament and numen nature / Kagon J. – New York: Basik Books, 1994. –15р.
2. Porges S.W. Orienting in a defensive world: mammalian modifications of our evolutionary heritage. A Polyvagal Theory / Porges S.W. // Psychophysiology. – 1995. – V.32 – P.301.
3. Слободская Е.Р. Развитие ребенка: индивидуальность и приспособление / Е.Р. Слободская. – Новосибирск, 2004. – 251с.
4. Strelay J. Temperament: A psychological perspektive / Strelay J. – N.Y.: Plenym,1999. – 311р.
5. Солдатова О.Г. Темперамент человека как фактор, влияющий на уровень здоровья / Солдатова О.Г., Савченков Ю.И., Шилов С.Н. // Физиология человека. – 2007. – Т.33, № 2. – С.76-80.
6. Иващенко Л.Я. Морфофункциональная характеристика различных уровней физического состояния женщин зрелого возраста / Иващенко Л.Я. // Сб. науч. трудов / Под общ. ред. В.Д. Сонькина. – М.: ВНИИФК, 1991. – С.169-171.
7. Романенко В.А. Диагностика двигательных способностей / В.А. Романенко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2005. – 290с.
8. Апанасенко Г.Л. Медицинская валеология / Апанасенко Г.Л., Попова Л.А. – К.: Здоров'я, 1998. – 244с.
9. Криволапчук И.А. Особенности физического состояния детей 6-8 лет с высокой личностной тревожностью / И.А. Криволапчук // Теор. і практ. фізич. вихов. – 2004. – № 2. – С. 128-133.
10. Романенко В.А. Особенности физического состояния у тревожных и нетревожных женщин / В.А. Романенко, О.С. Горецкий // Проблеми екології та охорони природи техногенного регіону. – Донецк, ДонНУ, – 2010, №1(10). – С.268-272.
11. Агаджанян Н.А. Физиологические механизмы респираторных феноменов при тревожных и депрессивных расстройствах / Н.А. Агаджанян, П.И. Терехин // Физиология человека. – 2002. – Т.28, №3. – С.112-122.
12. Апанасенко Г.А. Об оценке состояния здоровья / Г.А. Апанасенко // Врачебное дело. – 1988. – №5. – С. 112-114.
13. Душанин С.А. Бальная система самоконтроля (КОНТРЭКС-1) при занятиях массовыми формами физической культуры / С.А. Душанин // Теор. и практ. физ. культ. – 1978. – №5. – С.49-52.
14. Вознесенская Т.Г. Тревожные расстройства / Т.Г. Вознесенская // Репродуктивное здоровье женщины. – 2008. – №3. – С.21-26.
15. Еникопов С.Н. Тревожные состояния у больных сердечно-сосудистыми заболеваниями / С.Н. Еникопов // Атмосфера. Кардиология. – 2006. – №2. – С.20-24.
16. Данилова Н.Н. Зависимость сердечного цикла от тревожности как устойчивой индивидуальной характеристики / Н.Н. Данилова, С.Г. Коршунова, Е.Н. Соколов // Журн. ВНД. – 1995. – Т45, №4. – С. 647-660.
17. Романенко В.А. Психофизиология агрессивности / В.А. Романенко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 217с.

УДК 511.216

ПОДІЛЬНІСТЬ ЕЛЕМЕНТІВ ЗВОРОТНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

А.Г. Матюхіна, Л.Л. Оридорога

Резюме. Для зворотних послідовностей ІІ-го порядку досліджена подільність елементів, які задаються арифметичними виразами від кореня з цілого числа D- дискримінанта характеристичного рівняння, на прості числа p. В залежності від того чи є D- квадратичним лишком у полі лишків за модулем p, отримані дві теореми, які дозволяють, знаючи зворотну послідовність (її перший член та характеристичне рівняння), вказати номера членів цієї послідовності (без обчислення їх самих), які діляться націло на дане нам просте число p.

Ключові слова: подільність, послідовність, поле, формула Біне.

Вступ. В даній роботі досліджені різні задачі на подільність чисел, що задаються арифметичними виразами від кореня з цілого числа D - дискримінанта характеристичного рівняння зворотних послідовностей ІІ-го порядку. В залежності від того, чи є Dквадратичним лишком за даним простим модулем p, застосовується один з двох методів. Якщо Dє квадратичним лишком за модулем p, то цей вираз сам є елементом поля лишків за модулемp. Інакше він є елементом розширення даного поля другого порядку, побудованого за допомогою елемента $\sqrt{D}$. В першому випадку для дослідження подільності застосовується мала теорема Ферма, в другому — її аналог для скінчених полів.

Отримані результати застосовуються для дослідження подільності спочатку чисел Фібоначчі, а потім елементів довільних зворотних послідовностей на прості числа *p*. При цьому відповідь суттєво відрізняється, в залежності від того, чи є дискримінант характеристичного рівняння послідовності квадратичним лишком за модулем *p*.

Додаткові позначення.

- Z_p- поле лишків за модулем p. Порядок Z_p дорівнює p.
- Z_p^* - мультиплікативна група кінцевого поля Z_p. Порядок Z_p^* дорівнює p-1.
- $Z_p[\xi]$ –множина, яка вийшла розширенням поля Z_p за допомогою ξ- кореня незвідного рівняння
- II-го ступеня, а саме ξ^2-D=0. Множина $Z_p[\xi]$ є полем, так як виконуються всі властивості поля. Порядок поля $Z_p[\xi]$ дорівнює p^2.
- a+bξ та c+dξ та e+fξ– елементи поля $Z_p[\xi]$ (a, b, c, d, e, f$\in Z_p$).
- Zp[ξ]*- мультиплікативна група кінцевого поля Zp[ξ]. Порядок Zp[ξ]* дорівнює p^2-1

Випадок, коли дискримінант характеристичного рівняння є квадратичним лишком у полі лишків за простим модулем p.

$$a_i=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right)$$

формула Біне для обчислення i-го члена послідовності Фібоначчі.

При i=n(p-1), n $\in$ Z, p— просте, формула Біне має вид:

$$a_{n(p-1)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n(p-1)}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n(p-1)}\right).$$

Якщо 5— квадратичний лишок замодулемр (у полі Z_p), то$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\equiv x(\mathrm{mod}\ p)$та

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\equiv y\ (\mathrm{mod}\ p)$$

тоді формула Біне перетворюється у такий вид:

$$a_{n(p-1)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x^{n(p-1)}-y^{n(p-1)}\right)x,\ y\in Z_p\ ,$$

(p≠2 та p≠5— так якформула Біне у Z_2 та у Z_5 має ділення на нуль).

По малій теоремі Ферма— при p простому і m,яке не діляться на p, маємо:

$m^{p-1}\equiv 1\ \ (\mathrm{mod}\ p)$

Якщо m=x^n та x$\not\equiv$ 0(modp), тоді $x^{n(p-1)}\equiv 1$(modp)

Якщо m=y^n та y$\not\equiv$ 0(modp), тоді $y^{n(p-1)}\equiv 1$(modp)

В результаті отримаємо:

$$a_{n(p-1)}\equiv\frac{1}{\sqrt{5}}(1-1)\ (\mathrm{mod}p);$$

$$a_{n(p-1)}\equiv 0\ (\mathrm{mod}p)$$

Теорема про подільність елементів послідовності Фібоначчі.

Якщо5— квадратичний лишок у полі лишків за модулем p, у Z_p, p≠2 та p≠5, то $a_{n(p-1)}$ член послідовності Фібоначчі $\{a_i\}$ націло ділиться на p, $a_{n(p-1)}\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ n$\in$Z, p — просте.

Узагальнюючи висновок про подільність елементів послідовністі Фібоначчі$\{a_i\}$ до будь-якої зворотної послідовності $\{u_i\}$, маємо:

Нехай $u_0=0$— виконується для будь-якої зворотної послідовності$\{u_i\}$, тоді вираз для обчислення n(p-1) члена послідовності $\{u_i\}$ має вид:

$$u_{n(p-1)}=\frac{\gamma}{\sqrt{D}}\left(\left(\frac{a_0+\sqrt{D}}{2}\right)^{n(p-1)}-\left(\frac{a_0-\sqrt{D}}{2}\right)^{n(p-1)}\right)\gamma \in R(1)$$

D-дискримінант характеристичного рівняння $q^2=a_0q+b_0$ зворотної послідовності $u_{i+2} = a_0 u_{i+1} +b_0 u_i(a_0 , b_0\in Z)$;

$\frac{a_0+\sqrt{D}}{2}$ та $\frac{a_0-\sqrt{D}}{2}$— корені характеристичного рівняння

Розглядаючи D, як квадратичний лишок у Z_p та застосовуючи до виразу (1) малу теорему Ферма, маємо:

$$u_{n(p-1)}\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$$

$p\neq2$ та $D\neq0(\mathrm{mod}\, p)$ — так як у виразі (1) є ділення на ці числа;

$b_0\neq0(\mathrm{mod}\, p)$ — так як один із коренів характеристичного рівняння при $b_0\equiv0(\mathrm{mod}\, p)$ дорівнює нулю.

Теорема про подільність елементів зворотних послідовностей ІІ-го порядку.

Якщо дискримінант характеристичного рівняння зворотної послідовності ІІ-го порядку $\{u_i\}$ є квадратичним лишком за даним простим модулем p, то $u_{n(p-1)}$ член $\{u_i\}$ націло ділиться на p,

$u_{n(p-1)}\equiv0(\mathrm{mod}\, p)$ *$n\in Z$, p — просте.*

Випадок, коли дискримінант характеристичного рівняння є квадратичним нелишком у полі лишків за простим модулем p.

Так як порядок елементу -це ступінь в який потрібно звести елемент, щоб

отримати 1 [3]. Порядок елементу дорівнює порядку циклічної підгрупи яка містить цей елемент (це випливає через обмеженість підгрупи) [3].

У всякої скінченної групи порядок будь-якої підгрупи є дільником порядку самої групи (теорема Лагранжа).

Із цього випливає, що будь-який елемент групи скінченного поля зведений в порядок цієї групи дорівнює 1.

Застосовуючи дану теорему до груп $Z_p[\xi]^*$ та Z_p^*, маємо:

будь-який елемент із $Z_p[\xi]^*$зведений до p^2-1 дорівнює 1, тому $(a+b\xi)^{p^2-1}= 1$;

будь-який елемент із Z_p^*зведений до *p-1* дорівнює 1, тому $c^{p-1}=1$, $c\in Z_p^*$

У множині $Z_p[\xi]^*$ рівнянняc^{p-1}=1 має не більше ніж p-1 коренів. Це випливає із того, що елементів у множині Z_p^*: *p-1*, і кожен із них є коренем цього рівняння, тому інших коренів у цьому рівнянні у полі $Z_p[\xi]^*$ не існує.

А так як $(a+b\xi)^{p^2-1}= ((a+b\xi)^{p+1})^{p-1}$=1- за раніше доведенням,

тому $(a+b\xi)^{p+1}$=c.

Із цього слідує,що при зведенні будь-якого елементу із $Z_p[\xi]^*$ до степеня$p+1$ в результаті завжди отримаємо певний елемент, який входить у Z_p^*.

$(a+b\xi)^{p+1}=a_1$, $a_1\in Z_p^*$

За допомогою математичної індукції доводиться:

Якщо спряжені числа із$Z_p[\xi]^*$ звести до степеня n, то отримаємо також спряжені числа, які належать $Z_p[\xi]^*$, тобто

$(a+b\xi)^n=a_1+b_1\xi$(2) $(a-b\xi)^n=a_1-b_1\xi$

При n=p+1 та використовуючи, те що $(a+b\xi)^{p+1}=a_1$, $a_1\in Z_p^*$, маємо:

$(a+b\xi)^{p+1}=a_1$, $a_1\in Z_p^*$

$(a-b\xi)^{p+1}=a_1$, $a_1\in Z_p^*$

І тому

$(a+b\xi)^{p+1}=(a-b\xi)^{p+1}$

Якщо піднести обидві частини рівнянь (2) до степеня p+1, отримаємо

$((a+b\xi)^n)^{p+1}=(a_1+b_1\xi)^{p+1}=a_2$

$((a-b\xi)^n)^{p+1}=(a_1-b_1\xi)^{p+1}=a_2$

Тому $(a+b\xi)^{n(p+1)}=(a-b\xi)^{n(p+1)}$

Тому у загальному випадку:

Спряжені числа ізZ_p^*: $a+b\xi$ та$a-b\xi$, зведені у степінь n(p+1), де $n\in Z$, p — простедорівнюють один одному, тобто виконується $(a+b\xi)^{n(p+1)}=(a-b\xi)^{n(p+1)}$.

Застосуємо дані доведення до формули Біне послідовності Фібоначчі $\{a_i\}$:

$$a_i=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^i-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^i\right)$$

Якщо $\frac{1}{2}=a$

$\frac{1}{2}=b$

$\sqrt{5}=\xi$,тобто 5- є квадратичним нелишком у Z_p

$i=n(p+1)$

То $a_{n(p+1)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((a+b\,\xi)^{n(p+1)}-(a-b\,\xi)^{n(p+1)}\right)$

За раніше доведенним $(a+b\xi)^{n(p+1)}=(a-b\xi)^{n(p+1)}$ маємо:

$$a_{n(p+1)}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$$

Теорема про подільність елементів послідовності Фібоначчі.

Якщо 5— квадратичний нелишок у полі лишків за модулем p, у Z_p, $p\neq 2$ та $p\neq 5$, то $a_{n(p+1)}$ член послідовності Фібоначчі $\{a_i\}$ націло ділиться на p, $a_{n(p+1)}\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ $n\in Z$, p — просте.

Узагальнюючи висновок про подільність елементів послідовності Фібоначчі$\{a_i\}$ до будь-якої зворотної послідовності $\{u_i\}$, маємо:

$$u_{n(p+1)}=\frac{\gamma}{\sqrt{D}}\left(\left(\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{D}\right)^{n(p+1)}-\left(\frac{a_0}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{D}\right)^{n(p+1)}\right)\gamma\in R$$

При $a=\frac{a_0}{2}$

$b=\frac{1}{2}$

$$\xi=\sqrt{D},\text{D-квадратичний нелишок у } Z_p,$$

тому вираз для знаходження n(p+1) члена послідовності $\{u_i\}$ перетворюється у такий вид:

$$u_{n(p+1)}=\frac{\gamma}{\xi}\left((a+b\xi)^{n(p+1)}-(a-b\xi)^{n(p+1)}\right)$$

А так як $(a+b\xi)^{n(p+1)}=(a-b\xi)^{n(p+1)}$-за раніше доведеним ,то

$$u_{n(p+1)}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)$$

Із цього виходить—

Теорема про подільність елементів зворотних послідовностей ІІ-го порядку.

Якщо дискримінант характеристичного рівняння зворотної послідовностіІІ-го порядкує квадратичним нелишком за даним простим модулем p, то $u_{n(p+1)}$ член довільної зворотної послідовності$\{u_i\}$ націло ділиться на p$u_{n(p+1)}\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ $n\in Z$, p — просте.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. - 1950.- С. 3-47.
2. Виноградов И.М.Основы теории чисел. - 1981. - С. 17-21, 38-82.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - 1975. - С. 110-123, 266-305,392-417.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. - 2000. - С. 8-493.
5. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. -1978.- С. 3-115.