4. Sedgewick R. Algorithms In C: Fundamentals, Data Structures, Sorting, Searching, Parts 1–4. Addison-Wesley Professional, 1997. 752 p.

5. Programming Languages – C++. Standart (ISO/IEC JTC1 SC22 WG21 N4860). URL: https://isocpp.org/files/papers/N4860.pdf (дата звернення: 20.02.2024).

6. Офіційний сайт Github. URL: https://github.com/shevmee/algorithms (дата звернення: 24.02.2024).

7. Денисюк В. О., Потапова Н. А., Зелінська О. В., Тарасюк М. Б. Програмна реалізація та дослідження алгоритмів паралельного швидкого сортування. *Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки.* 2023. № 4. С. 95–105. URL: http://journals.khnu.km.ua/vestnik/wp-content/uploads/2023/09/323-95-105.pdf (дата звернення: 01.03.2024).

УДК 517.9

ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛЕЙ ЛАНЧЕСТЕРА ДЛЯ АНАЛІЗУ РОСІЙСЬКО-УКРАЇНСЬКОЇ ВІЙНИ

В. О. Яропуд, О. С. Вєтров

Анотація. Метою роботи є детальний аналіз бойових моделей Ланчестера, їх застосування в різних воєнних конфліктах та визначення ефективності цих моделей в Україні. Однією з ключових переваг моделей Ланчестера є їх здатність до врахування різних факторів, як-от чисельність військ, обмундирування, ефективність зброї і тактичні параметри. Це дає змогу розробляти комплексні стратегії та аналізувати різні сценарії розвитку конфлікту.

Ключові слова: аналіз бойових дій, математичне моделювання, модель Ланчестера.

Вступ. Спираючись на аналіз наукової літератури, можна умовно зазначити чотири загальні класи математичних моделей воєнних дій: описові моделі, імітаційні моделі, оптимізаційні моделі та моделі ухвалення рішень. Кожен із цих класів (можливі й інші підстави класифікації) охоплює значну кількість підкласів, що розрізняються математичним апаратом, який використовується.

Основний розділ. Під час Першої світової війни Ф. У. Ланчестер, англійський інженер і математик, створив математичні моделі повітряних боїв. Ці моделі були застосовані до різних ситуацій – від бойових дій регулярних військ і партизанських з'єднань до комбінованих сценаріїв. Розглядається три моделі [1]. Уявімо, що в бойових діях беруть участь дві сторони – x і y. Чисельний склад цих сторін у момент часу t (вимірюваний у днях, починаючи з першого дня бойових дій) позначається як $x(t)$ і $y(t)$ відповідно. Чисельність сторін у цих моделях є важливим фактором, але врахування інших чинників, як-от бойова готовність, озброєння, досвід командирів, моральний настрій і багато інших, є практично неможливим завданням.

Припустимо, що чисельність сторін $x(t)$ і $y(t)$ змінюється неперервно і є диференційованою функцією часу. Це спрощення, оскільки насправді $x(t)$ і $y(t)$ є цілими числами. Однак у разі достатньо великої чисельності кожної сторони збільшення чисельності на кілька осіб має практично незначний вплив, порівняно з наявною чисельністю. Тому можна припустити, що протягом коротких проміжків часу чисельність змінюється незначно (не цілими кількостями). Це припущення недостатнє для виведення конкретних формул для $x(t)$ і $y(t)$ як функцій від t.

Можна вказати кілька факторів, що впливають на швидкість зміни чисельності сторін. Позначимо OLR як швидкість, з якою сторона x зазнає втрат від хвороб і інших факторів, що не пов'язані з бойовими діями.

Далі припустимо, що CLR представляє швидкість втрат стороною x внаслідок прямих зіткнень зі стороною y під час бойових дій. Позначимо RR як швидкість прибуття підкріплень до сил сторони x. Тоді рівняння для швидкості зміни $x(t)$ можна записати так:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -(OLR + CLR) + RR.$$

Аналогічне рівняння буде використовуватись для $y(t)$. Тепер завдання полягає в тому, щоб визначити формули для OLR, CLR і RR, а потім дослідити отримані диференціальні рівняння. Отримані висновки допоможуть відповісти на питання про можливого переможця.

Для сторони $y(t)$ також буде аналогічне рівняння. Задача полягає у визначенні формул для OLR, CLR та RR, а потім дослідженні отриманих диференціальних рівнянь. Отримані висновки дадуть змогу відповісти на питання про потенційного переможця.

Далі використовуватимемо такі позначення:

a, b, c, d, g, h – невід'ємні сталі, що відображають вплив різних факторів на втрати сил x та y; $P(t)$ та $Q(t)$ – компоненти, що враховують можливість підсилення військ x та y протягом дня;

x_0, y_0 – кількість сил x і y перед початком бойових дій.

Випишемо три моделі, побудовані Ланчестором. Перша з них стосується бойових дій між регулярними військами, вона має такий вигляд:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax - by + P(t), \frac{dy(t)}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t).$$

Далі ця система буде називатись диференціальною системою типу А.

Друга модель описує бойові дії між партизанськими об'єднаннями. Її ми будемо називати диференціальною системою типу В:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax - gx(t)y(t) + P(t), \frac{dy(t)}{dt} = -dy(t) - hx(t)y(t) + Q(t).$$

Третя модель, яку ми будемо називати диференціальною системою типу С, описує змішаний тип бойових дій, у яких беруть участь як регулярні частини, так і партизанські об'єднання, має вигляд:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax - gx(t)y(t) + P(t), \frac{dy(t)}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t).$$

Кожне з рівнянь, наведених вище, виражає швидкість зміни чисельності протиборчих сторін залежно від різних факторів і має форму (1). Втрати живої сили, які не пов'язані з бойовими діями і визначаються членами $-ax(t)$ та $-dy(t)$, дають змогу визначити постійні відносні швидкості втрат (у відсутність бойових дій та підкріплень) за допомогою рівнянь:

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -a, \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -d.$$

Якщо в моделях Ланчестера присутні тільки члени, які відповідають підкріпленням та втратам, не пов'язаним з бойовими діями, це означає, що останні зовсім відсутні. Наявність членів $-by(t)$, $-cx(t)$, $-gx(t)y(t)$ і $-hx(t)y(t)$ вказує на наявність втрат.

Розглядаючи систему типу А, припустимо, що обидві протиборчі сторони перебувають у зоні вогню, і вогонь спрямовується лише на живу силу, яка безпосередньо бере участь у бойових діях. Із цими уявленнями Ланчестер пропонує ввести член $-by(t)$ для військових підрозділів сторони x, що відображатиме втрати у бою. Коефіцієнт b вказуватиме на ефективність бойових дій сторони y. Отже, рівняння:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -b$$

показує, що стала b є одиницею вимірювання середньої ефективності кожної одиниці бойових сил сторони y. Аналогічні вирази можуть бути застосовані до члена $-cx(t)$. Зрозуміло, що визначення коефіцієнтів b і c є складним завданням. Один зі шляхів – подивитись на коефіцієнти у вигляді:

$$b = r_y p_y, c = r_x p_x,$$

де r_y і r_x – коефіцієнти вогневої міці сторін y і x відповідно;

p_y і p_x – це ймовірності, що кожен з пострілів зі сторони y і x відповідно виявиться влучним.

Зазначимо, що в диференціальній системі типу А члени, що відповідають бойовим втратам, є лінійними. Під час переходу до систем типу В аналогічні члени стають нелінійними, що можна пояснити так.

Припустимо, що партизанські сили з чисельністю $x(t)$ людей займають невидиму для противника територію R. Хоча противник контролює територію R, він не має інформації про ефективність своїх дій. Ймовірно, втрати партизанських підрозділів x є пропорційними числу $x(t)$ на R і числу бойових сил противника $y(t)$. Отже, член, що відповідає за втрати партизанських об'єднань x, може бути представлений як $-gx(t)y(t)$, де коефіцієнт ефективності бойових дій сторони y складніший для оцінки, ніж коефіцієнт b у першому рівнянні.

Припустимо, що регулярні війська двох протиборчих сторін ведуть бойові дії в тій спрощеній ситуації, коли втрати, не пов'язані з такими діями, відсутні. А тоді, якщо обидві сторони не отримують ще підкріплення, математична модель зводиться до диференціальної системи:

$$\frac{dx}{dt} = -by, \frac{dy}{dt} = -cx.$$

Отримаємо:

$$\frac{dx}{dt} \div \frac{dy}{dt} = \frac{-cx}{-by},$$

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{cx}{by}.$$

Після скорочень отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by}.$$

Отримане рішення задається гіперболою, і ми можемо більш точно класифікувати систему. Саме таку систему можливо назвати диференціальною системою з гіперболічним законом.

Ми можемо використати коефіцієнт вогневої міці r_y для визначення ймовірності пострілу зі сторони y. Згідно з судженням Ланчестера, ймовірність пострілу прямо пропорційна територіальній ефективності A_{ry} одного пострілу зі сторони y і зворотно пропорційна площі A_x території R, що займають сили x. Водночас A_{ry} представляє площу, зайняту одним партизаном. Ми можемо визначити формули для g і h:

$$g = \frac{r_y A_{ry}}{A_x}, h = \frac{r_x A_{rx}}{A_y}.$$

Як приклад, на рис. 1 наведена візуалізація моделі А Ланчестера (найпростіша модель аналізу бойових дій).

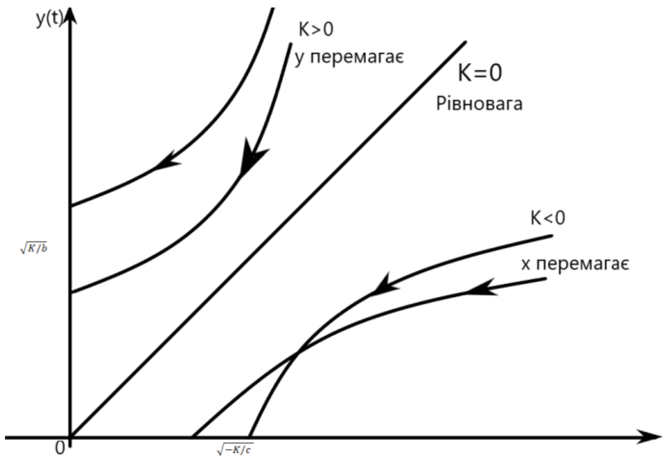

Рис. 1. Модель Ланчестера (тип А)

Далі у межах роботи було проведено аналіз наявних досліджень, пов'язаних із застосуванням моделей Ланчестера в контексті воєнних конфліктів. Було виявлено, що ці моделі широко використовуються для прогнозування результатів битв, аналізу воєнних стратегій та визначення оптимальних кількостей військових ресурсів.

Однією з ключових переваг моделей Ланчестера є їх здатність до врахування різних факторів, як-от чисельність військ, обмундирування, ефективність зброї та тактичні параметри. Це дає змогу розробляти комплексні стратегії та аналізувати різні сценарії розвитку конфлікту. Проте варто зазначити, що моделі Ланчестера мають свої обмеження. Вони базуються на припущеннях, які можуть не завжди відповідати реальності. Наприклад, вони не враховують складних факторів, як психологічний стан військових, економічні аспекти та політичні чинники, які також впливають на воєнний конфлікт.

Тому важливо використовувати моделі Ланчестера як один з інструментів у комплексному аналізі воєнних конфліктів, доповнюючи їх іншими методами та підходами. Враховуючи їх обмеження, вони можуть допомогти зрозуміти загальну динаміку битви та визначити загальну тенденцію розвитку конфлікту.

Використовуючи дані моделі Ланчестера, стає можливо проаналізувати вплив різних факторів на результати російсько-української війни [2–3]. Наприклад, ми можемо дослідити, як зміна чисельності військ, їх озброєння і тактичні параметри можуть впливати на результати битв, контроль над територіями та загальний перебіг конфлікту. Такий аналіз може допомогти зрозуміти стратегічні пріоритети та ефективно використовувати ресурси для досягнення мети в умовах війни.

Однак важливо пам'ятати, що моделі Ланчестера не є універсальними і не можуть передбачити всі аспекти воєнного конфлікту. Вони є лише одним інструментом у арсеналі аналізу і стратегічного планування. Додаткові дослідження, аналіз і консультації з експертами з воєнної справи також є важливими для отримання більш повного розуміння російсько-української війни та розробки ефективних стратегій.

Abstract. The aim of the paper is to analyze in detail the Lanchester combat models, their application in various military conflicts and to determine the effectiveness of these models in Ukraine. One of the key advantages of the Lanchester models is their ability to take into account various factors such as troop numbers, uniforms, weapon effectiveness, and tactical parameters. This allows for the development of comprehensive strategies and analysis of different conflict scenarios.

Keywords: combat analysis, mathematical modeling, Lanchester's model.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Фурсенко О. К., Черновол Н. М. Ланчестеровські моделі бойових дій. *Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил*. 2020. № 4(66). С. 85–91. DOI: 10.30748/zhups.2020.66.12.
2. The mathematical model based on the battle of Ukraine and Russia / R. Manikandan, B. Varadharajan, M. Viji, C. Sri. *International Journal for Research Trends and Innovation*. 2022. Vol. 7, iss. 6. P. 162–165. URL: https://ijrti.org/papers/IJRTI2206029.pdf
3. Korshak S. New AFU Victory May Be in the Works: Russian Forces in Lyman Are «Effectively Surrounded». *Kyiv Post*. Sep. 30, 2022. URL: https://www.kyivpost.com/post/948