маршрути польотів безпілотників, може значно підвищити обороноздатність України та забезпечити безпеку об'єктів критичної інфраструктури. Навіть більше, розвиток таких технологій в Україні має великий потенціал не лише для військових, але й для приватного сектору, де безпека має вирішальне значення. Такі технології можуть стати основою сучасної системи національної безпеки, яка захистить Україну від нових загроз та зміцнить її позиції на міжнародній арені.

Abstract. This paper discusses the methodology for developing locators and establishing a safe logistics route for military units, taking into account the threat of detection by unmanned aerial vehicles (drones). The proposed system uses acoustic sensors to determine the location of drones based on the time of arrival of sound waves (TOA). An evasion algorithm has been implemented that models the probability of detection and route change in accordance with the data obtained. The created simulation demonstrates the effectiveness of the approach in real conditions. The proposed method can be applied in military operations and security systems.
Keywords: locator, drone, military logistics, modeling, route optimization.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Товкач І. О. Методи адаптивного оцінювання параметрів руху безпілотного літального апарату на основі вимірювань сенсорної мережі: дис. … канд. техн. наук: 05.12.17 – радіотехнічні та телевізійні системи. Київ, 2018. 169 с.
2. Abambres M., Marcy M., Doz G. Potential of Neural Networks for Structural Damage Localization. *ACI Avances En Ciencias E Ingenierías*. 2018. Vol. 11, № 2. P. 124−153.
3. Pau J. L., Garg S. Acoustic detection systems for unmanned aerial vehicles (UAVs): Principles and applications. *Journal of Aerospace Engineering*. 2020. Vol. 33, № 2. P. 25–42 (дата звернення: 10.03.2024).
4. Zhang L., Wang H., Liu Y. Target localization and tracking of UAVs using acoustic sensing. *A review. Sensors*. 2019. Vol. 19, № 3. P. 579–594 (дата звернення: 10.03.2024).
5. Bennett J., Tran D. Acoustic sensor networks for UAV detection and tracking. *A review. IEEE Access*. 2018. Vol. 6. P. 3452–3468 (дата звернення: 10.03.2024).
6. Wang Z., Zhang H., Xu Y. Acoustic time-of-arrival estimation for unmanned aerial vehicles (UAVs): Algorithms and challenges. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2020. Vol. 56, № 4. P. 3120–3135 (дата звернення: 10.03.2024).
7. Zhang S., Wu X. Optimization of military logistics with UAVs: Applications in acoustic sensor-based detection systems. *Journal of Defense Modeling and Simulation: Applications, Methodology, Technology*. 2021. Vol. 18, № 2. P. 85–99 (дата звернення: 10.03.2024).
8. Deng Y., Zhang X. Analysis and design of acoustic detection systems for UAV surveillance and countermeasures. *Applied Acoustics*. 2019. Vol. 148. P. 15–26 (дата звернення: 10.03.2024).
9. Shao J., Zhang Y., Li X. Acoustic sensor networks for UAV detection and interception in military applications. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2020. Vol. 312. P. 112–120 (дата звернення: 10.03.2024).

УДК 517.95

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

А. І. Родюк, А. В. Луценко

Анотація. У статті йдеться про застосування математики для моделювання повсякденних ситуацій. Особливу роль надано застосуванню диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП) в математичному моделюванні. Як приклад такого застосування розглянуто запис ДРЧП для трьох ситуацій: потоку транспорту по односмуговій дорозі, реакції водія на навколишній транспорт і простого злочину – квартирної крадіжки. Підкреслено важливість математики не лише у фундаментальних науках, але й у проблемах, що оточують нас щодня.
Ключові слова: математика, математичне моделювання, модель, диференціальні рівняння з частинними похідними.

Вступ. Математичне моделювання – це застосування математики для опису і дослідження проблем реального світу. За допомогою математичних засобів проблему реального світу інтерпретують в математичну задачу. Водночас основною метою є створення не найбільш повної описової моделі, а найбільш простої, яка все ж мітить усі основні фактори впливу, та проведення експериментів з математичним представленням, а не у реальному світі.

Під реальними проблемами маються на увазі проблеми з біології, хімії, інженерії, екології, фізики, соціальних наук, статистики, навколишнього середовища тощо. Математичне моделювання можна охарактеризувати як діяльність, що дає змогу математику залежно від проблеми, яку він вирішує, бути біологом, хіміком, екологом, економістом тощо.

Завдяки правильному аналізу моделі з використанням відповідних математичних інструментів можна отримати краще розуміння системи. Крім того, в процесі побудови моделі виявляються фактори, які є найбільш важливими та які розкривають зв'язок різних аспектів задачі. Таким чином, математичне моделювання відіграє важливу роль у фундаментальних науках та дозволяє аналізувати, описувати та прогнозувати поведінку складних систем, що, своєю чергою, сприяє прийняттю найоптимальніших рішень проблем різних рівнів важливості.

Математику можна застосовувати не лише для моделювання наукових проблем. Насправді математичні засоби, такі як диференціальні рівняння з частинними похідними (ДРЧП), дозволяють моделювати і ситуації, що оточують нас щодня, наприклад, потік транспорту по одно-смуговій дорозі, реакція водія на навколишній транспорт і, навіть, злочин. Метою статті є демонстрація того, що математика має застосовування не лише в інших науках та глобальних проблемах, але й у звичайному житті, навіть там, де на перший погляд вона здається непотрібною та показ ролі диференціальних рівнянь з частинними похідними у математичному моделюванні повсякденних ситуацій.

Основний текст. Диференціальні рівняння з частинними похідними (ДРЧП) [1]. Означення. Рівняння вигляду

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_m}, \dots, u^{(k)}_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}}, \dots\right) = 0,$$

де F – задана дійсна функція;

$x_1, x_2, \dots, x_m$ – незалежні змінні (точка області D евклідового простору E^m, $m \geq 2$);

$u^{(k)}_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}} = \frac{\partial^k u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$ – дійсні змінні;

називається диференціальним рівнянням з частинними похідними (ДРЧП).

Функція $u(x)$ визначена в області D та неперервна разом із своїми частинними похідними, що входять до рівняння, яка перетворює рівняння на тотожність, називається регулярним розв'язком.

Головна різниця між звичайними диференціальними рівняннями (ЗДР) і ДРЧП полягає у кількості змінних. При використанні ЗДР ми обмежуємо наш аналіз використанням лише однієї незалежної змінної, тобто розглядаємо лише найважливіший фактор, а інші, своєю чергою, приймаються як незначні. Саме через це моделі, побудовані на ЗДР, не завжди відображають таку динаміку як явища в реальному світі. У такому випадку зручно використовувати ДРЧП. Їх перевага полягає у тому, що вони включають похідні принаймні двох незалежних змінних, що дозволяє розглянути більше факторів, які впливають на проблему.

Для прикладу розглянемо просту модель «хижак – жертва» (рівняння Лотки–Вольтерри) [2]:

$$\frac{dP_1}{dt} = \alpha P_1 - \beta P_1 P_2;$$
$$\frac{dP_2}{dt} = -\gamma P_2 + \delta P_1 P_2,$$

де використано одну незалежну змінну (час t) для вивчення динаміки системи. Але можна розглянути ефект руху жертви і хижака, додавши до рівнянь термін дифузії, тим самим зробивши його моделлю ДРЧП:

$$\frac{\partial P_1(x,t)}{\partial t} = \alpha P_1(x,t) - \beta P_1(x,t) P_2(x,t) + D_1 \frac{\partial^2 P_1(x,t)}{\partial x^2};$$
$$\frac{\partial P_2(x,t)}{\partial t} = -\gamma P_2(x,t) + \delta P_1(x,t) P_2(x,t) + D_2 \frac{\partial^2 P_2(x,t)}{\partial x^2}.$$

Тоді враховано просторовий аспект моделі, тому вона може дати повну картину динаміки системи «хижак – жертва» по відношенню як до часу t, так і до простору x.

Цей приклад гарно ілюструє як у певних ситуаціях раціональнішим є застосування ДРЧП, а не ЗДР.

Транспортний потік [3]. Метою є запис ДРЧП, що описує потік транспорту по односмуговій дорозі. При чому зосередження на моделюванні щільності автомобілів та їх потоку, а не окремих автомобілів та їх швидкості.

Нехай $\rho(x,t)$ – щільність автомобілів, а $f(x,t)$ – швидкість потоку автомобілів. Тобто $\rho(x,t)$ – кількість автомобілів на одиницю довжини в позиції x і часі t; $f(x,t)$ – кількість автомобілів, що проїжджають позицію x за одиницю часу в момент часу t.

Почнемо із запису закону збереження для автомобілів. Нехай $\mathrm{C} = [x_1, x_2]$ – комірка (довільна область простору); $T = [t_1, t_2]$ – крок часу (довільний інтервал часу). Тоді «закон збереження автомобілів звучатиме так: число машин в комірці в кінці кроку часу дорівнює числу машин у комірці на початку кроку додати потік машин у комірку відняти потік автомобілів із комірки. Виразивши цей закон через інтеграли отримаємо:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t_2)dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t_1)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x_1,t)dt - \int_{t_1}^{t_2} f(x_2,t)dt.$$

Можна переписати таким чином:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t_2) - \rho(x,t_1)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x_2,t) - f(x_1,t)dt = 0.$$

Припускаючи, що $\rho(x,t)$ гладка як функція від t, і $f(x,t)$ гладка як функція від x, можна застосувати фундаментальну теорему числення, і переписати вираз таким чином:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} dt\, dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dx\, dt = 0;$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dx\, dt = 0.$$

Якщо інтеграл є кусково-неперервним, це можливо лише для всіх контрольних обсягів та інтервалів, якщо сам інтеграл дорівнює нулю:

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = 0.$$

Теорія слідування за автомобілем [4]. Існують різні способи змоделювати реакцію водія на навколишній транспорт. Одна з них – реакція водія, а значить і його автомобіля (нехай це n-ий автомобіль), коли безпосередньо перед ним знаходиться інший автомобіль (відповідно $(n+1)$-ий), що рухається по одній смузі з ним без можливості об'їзду. Реакція n-го на $(n+1)$-ий пропорційна їх різниці швидкостей. Таким чином якщо a_n – прискорення, а u_n – швидкість n-го автомобіля, то

$$a_n = \lambda(u_{n+1} - u_n) \;\Rightarrow\; a_n = -\lambda(u_n - u_{n+1})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x_n}{dt^2} = -\lambda\left(\frac{dx_n}{dt} - \frac{dx_{n+1}}{dt}\right), \qquad (1)$$

де x_n – позиція n-го автомобіля.

Нехай L – довжина всіх автомобілів, що рухаються з однаковою швидкістю u, на відстані D один від одного. Інтегруючи (1) отримаємо

$$u = \frac{dx_n}{dt} = -\lambda(x_n - x_{n+1}) + c,$$

де c – константа інтегрування. Тоді

$$u = \lambda(x_{n+1} - x_n) + c = \lambda(L + D) + c = \frac{\lambda}{\rho} + c,$$

де $\rho = \frac{1}{L+D}$ – це щільність автомобілів.

Нехай $u = 0$, коли $\rho = \rho_{max}$, отже, $c = -\frac{\lambda}{\rho_{max}}$, тоді

$$u(\rho) = \frac{\lambda}{\rho} - \frac{\lambda}{\rho_{max}},$$

що дає відношення швидкості-щільності з теорії слідування за автомобілем. Однак оскільки $\rho \to 0$, $u \to \infty$, уточнимо $u(\rho)$ наступним чином:

$$u(\rho) = \begin{cases} u_{max}, 0 < \rho < \rho_{min} \\ \lambda(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{max}}), \rho_{min} < \rho < \rho_{max} \end{cases},$$

де
$$u_{max} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{max}}.$$

Модель злочинів [5]. Злочинність нерівномірно розподілена: деякі райони є достатньо безпечними, тоді як інші є небезпечними. У злочинців є свої улюблені зони і типи жертв, що постійно стають мішенню. Характер злочинності залежить від багатьох факторів, наприклад, бажання грабіжника відвідати раніше пограбований будинок, а не сусідній буде залежати від інформації про присутність власників вдома або цінностей, що є в будинку, уподобання злочинця також може залежати від вибору сприятливого району, де минулі успішні крадіжки створили враження, що мешканці толерантні до злочинності, що призводить до зростання кількості незаконних дій. Це відомо як ефект розбитого вікна.

Тут запропоновано просту модель злочину – квартирну крадіжку. Нехай $A(x, y, t)$ – привабливість для злочинця; $C(x, y, t)$ – щільність злочинності для даної локації. Тоді рівняння, що моделює даний злочин має вигляд:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha CA - \beta A + D_1 \nabla^2 A;$$
$$\frac{\partial C}{\partial t} = \gamma - \delta CA + D_2 \nabla^2 C,$$

де $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

В першому рівнянні αCA показує позитивний вплив успішних крадіжок на вибір місця злочину. Цей фактор спонукає грабіжників повторити злочин на тому ж місці, або поряд. Таким чином, щільність злочинів збільшується через привабливість локації. Вираз $(-\beta A)$ – означає, що з часом привабливість певного місця зменшується. Успішні крадіжки зі зломом у минулому можуть не спонукати грабіжників до вчинення злочину пізніше, що призводить до зниження привабливості місця. Дифузійний вираз $D_1 \nabla^2 A$, з коефіцієнтом дифузії $D_1 (> 0)$, вимірює поширення привабливості на сусідні райони через успішні крадіжки зі зломом.

В другому рівнянні γ – постійна щільність грабіжників у даному районі. У той час як деякі грабіжники залишають це місце після успішної крадіжки зі зломом, нові можуть проникнути на локацію через її привабливість, і, отже, передбачається постійне "введення" злочинців. Вираз $(-\delta CA)$ означає, що через привабливість місця грабіжник здійснить крадіжку саме в цьому місці, а не перейде в інше. Звідси і зниження щільності злочинності. Вираз $D_2 \nabla^2 C$ показує хаотичний рух злочинців. У зв'язку з певними обставинами грабіжник може вирішити переїхати в сусіднє місце, не здійснюючи крадіжки зі зломом в поточному місці.

Висновок. Математика – це наука, що не знає меж. Вона всеосяжна і з її допомогою можна описати весь навколишній світ. Саме для такого опису ми застосовуємо термін "математичне моделювання". Математична модель є інтерпретацією реальної життєвої ситуації в задачу, яку можна досліджувати, аналізувати, прогнозувати, шукати розв'язки та обирати із них найраціональніші, за допомогою математичних знарядь.

Для моделювання використовуються різні математичні засоби. Одним з таких засобів є ЗДР, які дозволяють моделювати ситуації, проте використовуючи лише одну незалежну змінну, що значно обмежує аналіз, тому в просторових моделях використовують ДРЧП, які включають похідні принаймні двох незалежних змінних. ДРЧП дозволяють моделювати не лише фізичні просторові явища, але й звичайні, повсякденні.

У статті наведено приклади запису диференціального рівняння для моделювання щільності автомобілів та їх потоку, реакції водія і, відповідно, його автомобіля на машину, що знаходиться прямо попереду, без можливості об'їзду та простої моделі злочину – квартирної крадіжки. Це лише маленька частинка ситуацій з повсякденного життя, які можна математично моделювати, що, в цьому випадку, застосована для наочного прикладу.

Можливість математичного моделювання даних ситуацій показує, що математика застосовується у значно ширшій кількості сфер, ніж заведено вважати, тому, думаю, варто вже підвищити її статус з цариці наук до звичайної цариці.

Abstract. The article deals with the application of mathematics to modeling everyday situations. Special attention is paid to the use of partial differential equations (PDEs) in mathematical modeling. As examples of such an application, PDEs are considered for three situations: traffic flow on a single-lane road, the driver's reaction to surrounding traffic, and a simple crime – burglary. The importance of mathematics is emphasized not only in fundamental sciences, but also in the problems that surround us every day.

Keywords: mathematics, mathematical modeling, model, partial differential equations.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Strauss W. A. Partial Differential Equations: An Introduction, 2nd Edition. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2007. С. 1–6.
2. Anisiu Lotka M.-C. Volterra and their model. *Didactica mathematica.* Vol. 32. P. 9–17. Bucharest: Editura Didactica Matematica, 2014. С. 4–8 (12–16). URL: (PDF) Lotka, Volterra and their model
3. Johnson E. A. Traffic flow: Deriving a partial differential equation from a global conservation law. New York, NY, USA: New York University, 2009. 1 p. URL: https://www.danlj.org/eaj/math/summaries/traffic_flow/trafficPDE.pdf
4. Childress S. Notes on traffic flow. New York, NY, USA: New York University, 2005. 28 с. URL: https://math.nyu.edu/~childres/traffic3.pdf
5. A statistical model of criminal behavior / M. B. Short, M. R. Dorsogna, V. B. Pasour, G. E. Tita, P. J. Brantingham, A. L. Bertozzi, L. B. Chayes. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.* Vol. 18. Hackensack, NJ, USA: World Scientific Publishing Company, 2008. С. 1249–1267.

УДК 519.7

ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

К. О. Родюк, А. В. Луценко

Анотація. У цій статті описано формулювання принципу Діріхле, його узагальнення, математичне доведення та геометричну інтерпретацію. Також проаналізовано різновиди принципу Діріхле, його зв'язок з іншими математичними методами та роль у сучасних наукових дослідженнях. Особливу увагу приділено застосуванню принципу Діріхле в інформатиці (геш-таблиці, стиснення даних), комбінаториці (розміщення об'єктів у множинах), теорії чисел (наближення Діофанта) та геометрії (розміщення точок у просторі).

Ключові слова: принцип Діріхле, геометрична інтерпретація, геш-таблиці, наближення Діофанта.

Вступ. Принцип Діріхле, також відомий як принцип кролів і кліток – один з базових тверджень в дискретній математиці. Він визначає, що якщо певну кількість об'єктів розмістити в певній кількісті контейнерів, при цьому число об'єктів перевищує число контейнерів, то хоча б один контейнер вміщатиме більше одного об'єкта. Проте найбільш просте та звичне формулювання звучить так: якщо кількість кролів більша за кількість кліток, то принаймні в одній клітці буде більше одного кроля. Ця простота і універсальність зробили принцип Діріхле одним з найважливіших інструментів в математиці та інших галузях науки. У сучасній математиці принцип Діріхле використовується в інформатиці, дискретній математиці, комбінаториці, теорії чисел, і геометрії.

Мета роботи полягає у висвітленні ролі принципу Діріхле в таких розділах математики, як комбінаторика, теорія чисел і геометрія та в інформатиці.

Основна частина. [1],[2],[3],[4],[5]. Принцип Діріхле був вперше сформульований німецьким математиком Петером Густавом Регером Діріхле (1805–1859) у 1834 році під назвою «Schubfachprinzip» (принцип шухляди). Діріхле успішно застосував цей принцип для доведення арифметичних формул, зокрема в теорії наближень Діофанта. Сам принцип став фундаментальним інструментом у комбінаториці та теорії чисел, хоча він не одразу отримав широке застосування. Принцип Діріхле, фомулюється таким чином: якщо $n+1$ об'єкт розміщено в n клітинках, то принаймні одна клітинка містить принаймні два об'єкти. Ідея цього принципу проста. Якщо клітинок менше, ніж об'єктів, то принаймні одна клітинка повинна містити біль-