

Можливість математичного моделювання даних ситуацій показує, що математика застосовується у значно ширшій кількості сфер, ніж заведено вважати, тому, думаю, варто вже підвищити її статус з цариці наук до звичайної цариці.

Abstract. The article deals with the application of mathematics to modeling everyday situations. Special attention is paid to the use of partial differential equations (PDEs) in mathematical modeling. As examples of such an application, PDEs are considered for three situations: traffic flow on a single-lane road, the driver's reaction to surrounding traffic, and a simple crime – burglary. The importance of mathematics is emphasized not only in fundamental sciences, but also in the problems that surround us every day.

Keywords: mathematics, mathematical modeling, model, partial differential equations.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Strauss W. A. Partial Differential Equations: An Introduction, 2nd Edition. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2007. С. 1–6.
2. Anisiu Lotka M.-C. Volterra and their model. *Didactica mathematica*. Vol. 32. P. 9–17. Bucharest: Editura Didactica Matematica, 2014. С. 4–8 (12–16). URL: (PDF) Lotka, Volterra and their model
3. Johnson E. A. Traffic flow: Deriving a partial differential equation from a global conservation law. New York, NY, USA: New York University, 2009. 1 p. URL: https://www.danlj.org/eaj/math/summaries/traffic_flow/trafficPDE.pdf
4. Childress S. Notes on traffic flow. New York, NY, USA: New York University, 2005. 28 с. URL: <https://math.nyu.edu/~childress/traffic3.pdf>
5. A statistical model of criminal behavior / M. B. Short, M. R. Dorsogna, V. B. Pasour, G. E. Tita, P. J. Brantingham, A. L. Bertozzi, L. B. Chayes. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. Vol. 18. Hackensack, NJ, USA: World Scientific Publishing Company, 2008. С. 1249–1267.

УДК 519.7

ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

К. О. Родюк, А. В. Луценко

Анотація. У цій статті описано формулювання принципу Діріхле, його узагальнення, математичне доведення та геометричну інтерпретацію. Також проаналізовано різновиди принципу Діріхле, його зв'язок з іншими математичними методами та роль у сучасних наукових дослідженнях. Особливу увагу приділено застосуванню принципу Діріхле в інформатиці (геш-таблиці, стиснення даних), комбінаториці (розміщення об'єктів у множинах), теорії чисел (наближення Діофанта) та геометрії (розміщення точок у просторі).

Ключові слова: принцип Діріхле, геометрична інтерпретація, геш-таблиці, наближення Діофанта.

Вступ. Принцип Діріхле, також відомий як принцип кролів і кліток – один з базових тверджень в дискретній математиці. Він визначає, що якщо певну кількість об'єктів розмістити в певній кількості контейнерів, при цьому число об'єктів перевищує число контейнерів, то хоча б один контейнер вміщатиме більше одного об'єкта. Проте найбільш просте та звичне формулювання звучить так: якщо кількість кролів більша за кількість кліток, то принаймні в одній клітці буде більше одного кроля. Ця простота і універсальність зробили принцип Діріхле одним з найважливіших інструментів в математиці та інших галузях науки. У сучасній математиці принцип Діріхле використовується в інформатиці, дискретній математиці, комбінаториці, теорії чисел, і геометрії.

Мета роботи полягає у висвітленні ролі принципу Діріхле в таких розділах математики, як комбінаторика, теорія чисел і геометрія та в інформатиці.

Основна частина. [1],[2],[3],[4],[5]. Принцип Діріхле був вперше сформульований німецьким математиком Петером Густавом Регером Діріхле (1805–1859) у 1834 році під назвою «Schubfachprinzip» (принцип шухляди). Діріхле успішно застосував цей принцип для доведення арифметичних формул, зокрема в теорії наближень Діофанта. Сам принцип став фундаментальним інструментом у комбінаториці та теорії чисел, хоча він не одразу отримав широке застосування. Принцип Діріхле, формулюється таким чином: якщо $n + 1$ об'єкт розміщено в n клітинках, то принаймні одна клітинка містить принаймні два об'єкти. Ідея цього принципу проста. Якщо клітинок менше, ніж об'єктів, то принаймні одна клітинка повинна містити біль-

ше двох об'єктів. Це твердження, хоч і здається тривіальним, проте має багато застосувань у різних галузях математики та інших дисциплінах.

Твердження Діріхле має узагальнення для рівномірного розміщення: якщо $kn + 1$ об'єкт розміщено у n клітинках, то принаймні одна клітинка містить принаймні $k + 1$ об'єкт. Дане узагальнення часто використовується у задачах оцінки кількості об'єктів у підмножині.

Доведення Діріхле ґрунтується на припущенні, що всі об'єкти рівномірно розподілені в комірці: якщо в n комірках міститься не більше одного об'єкта, то в них можна розмістити не більше n об'єктів. Однак, якщо об'єктів більше, ніж n , то принаймні одна клітинка повинна містити принаймні два об'єкти.

Принцип Діріхле широко використовується в інформатиці, геометрії, комбінаториці та в теорії чисел. В інформатиці принцип пояснює, що уникнути колізій в ґеш-таблицях неможливо. У геометрії використовується для доведення існування двох точок одного кольору на кольоровій площині на однаковій відстані. В теорії чисел використовується для існування простих чисел певної форми. У комбінаториці його використовують для розв'язування задач про розміщення об'єктів у множинах.

Теорія чисел і принцип Діріхле тісно пов'язані з наближенням Діофанта. Принцип Діріхле використовується для доведення існування раціональних наближень до ірраціональних чисел. Теорема Діріхле про діофантове наближення стверджує, що для будь-якого ірраціонального числа можна знайти нескінченно багато раціональних чисел, які є достатньо близькими до нього. Ця теорема базується на принципі Діріхле. Принцип Діріхле допомагає довести, що в контексті діофантового наближення для будь-якого ірраціонального числа можна знайти раціональне число, достатньо близьке до нього. Це робить теорему Діріхле важливим інструментом у вивченні властивостей ірраціональних чисел та їх наближень.

Принцип Діріхле використовується для доведення наявності певних властивостей у множині об'єктів, якщо кількість об'єктів перевищує кількість категорій, до яких їх можна віднести. Він часто використовується в математиці, в тому числі в задачах про подільність і теорії чисел.

Для нескінченних множин формулювання твердження звучить інакше. Якщо ми включимо нескінченну множину в скінченну категорію, то принаймні одна категорія буде містити нескінченну кількість об'єктів. Це не є прямим узагальненням принципу для скінченних множин, оскільки для нескінченних множин використовуються інші математичні конструкції.

Стохастичний варіант принципу Діріхле немає широкого застосування, але його можна уявити як застосування до випадкових процесів, де ймовірність події зростає з збільшенням кількості випробувань.

Геометрична інтерпретація принципу Діріхле полягає в тому, що якщо область поділена на менші частини, то принаймні одна частина повинна містити два або більше об'єктів, якщо кількість об'єктів у цій області перевищує кількість частин. Наприклад, якщо на площині намальована точка і її кількість перевищує кількість певних геометричних фігур, то принаймні дві з них повинні знаходитися в межах однієї фігури. Схематичну інтерпретацію принципу Діріхле можна пов'язати з розподілом точок на площині. Якщо кількість точок перевищує кількість областей, то принаймні дві з них повинні знаходитися в одній області. Це часто використовується для доведення існування певних геометричних структур.

Принцип Діріхле тісно пов'язаний з теорією чисел та алгебраїчною теорією чисел. Наприклад, теорема Діріхле про обернені елементи описує структуру мультиплікативної групи обернених елементів цілого кільця. Принцип Діріхле також використовується в топології та інших розділах математики для доведення існування певних властивостей множин.

Використання математичної індукції. Математична індукція використовується для доведення загальних випадків, коли потрібно показати, що властивість справедлива для всіх натуральних чисел. Принцип Діріхле використовується для доведення існування властивості в деякій скінченній множині. Наприклад, він використовується для доведення існування принаймні двох елементів в одній підмножині, коли об'єкти розподілені по меншій кількості підмножин.

Порівняння з принципом мінімуму в теорії ігор. Принцип мінімуму в теорії ігор використовується для визначення оптимальної стратегії в умовах невизначеності. Принцип Діріхле

має справу з розподілом об'єктів на підмножини і не має прямого відношення до оптимізації стратегій в іграх. Однак обидва принципи можна застосовувати в різних контекстах, щоб довести існування певних властивостей або стратегій.

Використання в топології. Принцип Діріхле безпосередньо не застосовується в теоремі Борсука–Улама, але він корисний в інших топологічних доведеннях. Теорема Борсука–Улама стверджує, що для будь-якої неперервної функції на сфері існує пара протилежних точок з однаковим значенням функції. Принцип Діріхле, використовується для доведення існування певних властивостей у скінченних множин.

Вплив на побудову метричних просторів. Принцип Діріхле не має прямого впливу на побудову метричних просторів, оскільки метричні простори часто розглядаються в контексті нескінченних множин, тоді як принцип використовується для доведення певних властивостей у скінченних множинах. Однак принцип Діріхле може бути корисним у певних задачах, пов'язаних з розподілом точок у просторі, що може бути важливим під час вивчення властивостей метричних просторів.

Застосування у математичній логіці. Ящик Діріхле, або принцип голуба і клітки, є фундаментальним комбінаторним твердженням в математиці. Він стверджує, що якщо об'єкти розподілені між місцями, і кількість об'єктів перевищує кількість місць, то принаймні одне місце містить принаймні два об'єкти. Цей принцип часто використовується як тип логічних міркувань для доведення різних математичних теорем. У контексті теорії доведень принцип Діріхле не має прямого відношення до теореми компактності. Теорема компактності – це концепція в математичній логіці, яка стверджує, що якщо кожна скінченна підмножина множини формул має модель, то вся множина формул також має модель. Однак обидва інструменти використовуються для побудови логічних аргументів у різних галузях математики. Принцип Діріхле використовується для доведення існування певних властивостей у скінченних множин, тоді як теорема компактності застосовується для нескінченних множин формул.

Принцип Діріхле допомагає оцінювати розв'язки рівнянь кількома способами:

1. Доведення існування. За допомогою принципу Діріхле можна довести існування певних властивостей серед великої кількості розв'язків. Наприклад, якщо існує багато розв'язків рівняння в певному діапазоні, то за допомогою принципу Діріхле можна довести, що серед цих розв'язків завжди є розв'язок, який задовольняє певні умови.

2. Оцінка кількості розв'язків. Принцип Діріхле може допомогти оцінити кількість розв'язків, які задовольняють певні умови. Це особливо корисно, коли необхідно знайти розв'язки з певними властивостями, як-от подільність або відношення.

3. Застосування у варіаційному численні. Хоча принцип Діріхле не застосовується безпосередньо до варіаційного числення, його ідеї можуть бути використані для оцінки кількості розв'язків певних задач, що виникають у цій галузі. Наприклад, у задачах, пов'язаних із діофантовими наближеннями, принцип Діріхле може допомогти довести існування певної множини чисел, що задовольняють певні умови.

4. У диференціальних рівняннях задача Діріхле – це задача знаходження розв'язку типу рівняння з певними граничними умовами. Хоча вона не має прямого відношення до принципу Діріхле, вона ілюструє важливість граничних умов під час оцінки розв'язків.

Висновки. Принцип Діріхле є одним із найпростіших, але надзвичайно ефективних математичних тверджень, що широко застосовується в різних галузях науки. Його застосовують в інформатиці, комбінаториці, теорії чисел.

В інформатиці принцип Діріхле пояснює, що уникнення колізій у геш-таблицях неможливе, оскільки кількість ключів перевищує кількість індексів. Також принцип використовують для стиснення даних. Жоден алгоритм стиснення без втрат не може стиснути всі файли, оскільки кількість можливих входних послідовностей перевищує кількість можливих послідовностей стиснення, доводячи, що жоден алгоритм стиснення без втрат не може стиснути всі файли.

У геометрії принцип Діріхле використовується для доведення існування двох точок одного кольору на кольоровій площині на відстані одного метра одна від одної.

У комбінаториці використовується для вирішення проблеми вибору карт або інших об'єктів так, щоб жоден з них не давав суму двох інших.

У теорії цілих чисел принцип Діріхле використовується для доведення існування простих чисел певної форми та інших властивостей цілих чисел. Він дає змогу довести, що для будь-якого дійсного числа існує багато наближень. Також він корисний для доведення діофантових наближень і тверджень про існування певних чисел.

У комбінаториці його використовують для розв'язування задач про розміщення об'єктів у множинах, для доведення існування певних властивостей та для оцінки числових властивостей множин.

Принцип Діріхле також має узагальнення для нескінченних множин і випадкових процесів, що робить його ще більш універсальним інструментом у дослідженнях. До того ж він пов'язаний з іншими фундаментальними математичними методами, як-от математична індукція, теорема Борсука–Улама та принцип мінімуму в теорії ігор.

Отже, важливість принципу Діріхле важко переоцінити, адже він не тільки забезпечує прості доведення складних математичних тверджень, але й відкриває нові шляхи для розвитку теоретичних і прикладних досліджень. Завдяки своїй універсальності та ефективності принцип Діріхле став важливим інструментом у багатьох галузях науки. Незважаючи на свою простоту, він продовжує надихати математиків і дослідників на нові відкриття, доводячи, що навіть найтривіальніші ідеї можуть мати глибокі наслідки і широкий спектр застосування.

Abstract. This article describes the formulation of Dirichlet's principle, its generalization, mathematical proof and geometric interpretation. The article also analyzes the varieties of Dirichlet's principle, its connection with other mathematical methods and its role in modern scientific research. Particular attention is paid to the application of the Dirichlet principle in computer science (hash tables, data compression), combinatorics (placement of objects in sets) and number theory (Diophantine approximation).

Keywords: Dirichlet principle, geometric interpretation, hash tables, Diophantine approximation.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Підготовка до олімпіади. URL: <https://surli.cc/wqoecj>
2. Pero В. Л. Принцип Діріхле. Задачі на застосування принципу Діріхле. URL: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/30234>
3. Принцип Діріхле. URL: https://uk.m.wikipedia.org/wiki/Принцип_Діріхле
4. Принцип Діріхле. URL: https://kaljafitska.blogspot.com/2015/05/blog-post_6.html
5. Голич А. В. Принцип Діріхле. URL: <https://teacherslifesite.wordpress.com/2015/11/28/принцип-діріхле/>

УДК: 004.89:339.138

АНАЛІЗ NLP-ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ CRM-СИСТЕМ

В. О. Труханська, О. В. Зелінська

Анотація. Дослідження присвячене впровадженню технологій обробки природної мови (NLP) у CRM-системи та їх вплив на оптимізацію процесів управління взаємодією з клієнтами. Проаналізовано основні напрями застосування NLP, зокрема автоматизовану обробку запитів, розпізнавання сутностей та персоналізацію комунікації. Розглянуто переваги та недоліки інтеграції NLP у CRM-системи, аспекти підвищення ефективності аналізу клієнтських даних, автоматизацію бізнес-процесів та покращення якості обслуговування. Окреслено основні виклики, що постають під час реалізації NLP-рішень. Визначено перспективи подальшого розвитку NLP-технологій у сфері CRM та їх роль у трансформації сучасних підходів до управління клієнтськими відносинами.

Ключові слова: системи, штучний інтелект, обробка природної мови, автоматизація, оптимізація.

Обробка природної мови (**NLP** – Natural Language Processing) є одним із найважливіших напрямів у галузі штучного інтелекту, що має значний вплив на сучасні бізнес-технології, зокрема системи управління відносинами з клієнтами (**CRM** – Customer Relationship Management). NLP-технології дають змогу CRM-системам краще взаємодіяти з користувачами через аналіз, розуміння та генерування природної мови, що суттєво покращує комунікацію між бізнесом і клієнтами [1]. У цій статті буде проведено аналіз NLP-технологій для CRM-систем, зосереджено увагу на їх впливі на автоматизацію бізнес-процесів, підвищення рівня обслуговування клієнтів та покращення аналітичних можливостей.