

щої точності порівняно з SGD з фіксованим кроком, а також Adam не вимагає дуже ретельного налаштування learning rate (β -параметри вбудовані за замовчуванням) [3]. Однак важливо перевіряти модель на окремому тестовому наборі, щоб уникнути перенавчання.

Test Accuracy: 96.94%

Рис. 2. Результат роботи нейронної мережі

Висновки. Нейронні мережі є універсальним підходом для побудови моделей, що апроксимують довільні функції. Вони складаються з послідовних шарів штучних нейронів: кожен нейрон обчислює зважену суму входів і пропускає її через нелінійну активацію [3]. Навчання мережі зводиться до оптимізації функції втрат за допомогою оновлення ваг. Алгоритм Adam є ефективним методом оптимізації: він адаптивно змінює швидкість навчання для кожної ваги на основі статистики градієнтів (першого та другого моментів) [3]. Завдяки цьому Adam часто забезпечує швидку збіжність і високу точність, зокрема у разі великих моделей і складних даних. Практична реалізація показала, що під час класифікації MNIST із використанням Adam прості мережі досягають високої точності (~98 %) відносно невеликою кількістю ітерацій. Отже, тема нейронних мереж і оптимізації (зокрема Adam) є актуальною для сучасних алгоритмів і наочним прикладом складних обчислювальних підходів в інформатиці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Altinel M. A. Development of Deep Learning Optimizers: Approaches, Concepts, and Update Rules. *Researchgate*. 2025. URL: <https://surl.li/zzzonp>
2. De Miranda G. C., De Lima G. G., Farias T. An Introduction to Neural Networks for Physicists. *Researchgate*. 2025. URL: <https://surl.li/tbosax>
3. Cerra F., Callegari F., Querzoni L. A Short Introduction to Neural Networks and Their Application to Earth and Materials Science. *Researchgate*. 2024. URL: <https://surl.li/zoglok>
4. Selvakumari S., Durairaj M. A Comparative Study of Optimization Techniques in Deep Learning Using the MNIST Dataset. *Indian Journal of Science and Technology*. 2025. Vol. 18, № 10. P. 803–810. URL: <https://indjst.org/articles/a-comparative-study-of-optimization-techniques-in-deep-learning-using-the-mnist-dataset>
5. Large-Scale Deep Learning Optimizations: A Comprehensive Survey / X. He, F. Xue, X. Ren, Y. You. *Researchgate*. 2021. URL: <https://surl.li/xhsbyd>
6. Stochastic Gradient Descent. *Wikipedia*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_gradient_descent

УДК 517.9

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ПРО НЕРУХОМІ ТОЧКИ В ПРОБЛЕМАХ РОЗВ'ЯЗНОСТІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

А. І. Матвієва, Д. В. Шевченко, К. О. Буряченко

Анотація. У роботі продемонстровано застосування теореми Шаудера про нерухомі точки до доведення існування розв'язків нелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Розглянуто приклади використання компактних операторів у функціональних просторах і показано вплив умов зростання нелінійності на існування розв'язку.

Ключові слова: нерухома точка; теорема Брауера; теорема Шаудера; нелінійні диференціальні рівняння; функціональний аналіз; крайова задача; компактний оператор.

Вступ. Теореми про нерухомі точки займають особливе місце в нелінійному аналізі, оскільки вони забезпечують один із найефективніших методів доведення існування розв'язків нелінійних рівнянь. Перші фундаментальні результати у цьому напрямі були отримані Л. Брауером на початку XX століття для неперервних скінченновимірних відображень. Подальший розвиток теорії відбувався завдяки працям Шаудера, який поширив ідеї Брауера на нескінченновимірні простори та сформулював теорему про нерухому точку для компактних операторів у нескінченновимірних банахових просторах. Ці результати стали ключовими для сучасного функціонального аналізу та дослідження нелінійних операторних рівнянь.

Значний внесок у подальший розвиток теорії нерухомих точок і її застосувань до задач математичної фізики зробив J.-L. Lions, який розробив методи розв'язування нелінійних крайових задач із монотонними операторами та задач із нелінійними граничними умовами [1]. Вагомі результати у дослідженні існування та єдиності розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь наведені в роботах S. Fucik, A. Kufner [2] та I. Skrzypnyk [6], у яких розглянуто широке коло задач, що зводяться до пошуку нерухомих точок операторів. Німецькі дослідники H. Gajewski, K. Gröger та K. Zacharias [3] з Інституту математики ім. Карла Вейєрштрасса (сучасний інститут WIAS в Берліні) розвинули узагальнену теорію для операторно-диференціальних рівнянь, що дозволило ефективно описувати еволюційні процеси в нелінійних середовищах. Важливу роль у формуванні аналітичного апарату для таких досліджень відіграли праці українських і зарубіжних математиків у галузі функціонального аналізу, зокрема монографія Y. Berezansky, Z. Sheftel, G. Us [4], у якій розглянуто операторні методи в просторах неперервних функцій.

Отже, теореми про нерухомі точки не лише мають фундаментальне значення в теоретичному аналізі, а й знаходять численні застосування у розв'язанні крайових і початкових задач, що описують різноманітні процеси в математичній фізиці, техніці та біоматематиці.

У цій роботі розглянемо, як теореми про нерухомі точки застосовуються під час дослідження існування розв'язків крайових та початкових задач для нелінійних диференціальних операторів. Для цього будемо використовувати деякі основні результати функціонального аналізу.

Під час доведення розв'язності першої крайової задачі для нелінійного рівняння другого порядку ми будемо використовувати теорему Шаудера та її наслідок – Теорему 2.

Теорема 1 (Шаудера)

Нехай D – замкнена опукла обмежена множина в банаховому просторі X , а оператор $A: D \rightarrow D$ є неперервним і компактним. Тоді в D існує хоча б одна нерухома точка $x_0 \in D$, оператора $A: Ax_0 = x_0$.

Теорема 2

Нехай $B_R = \{u \in X: \|u\| < R\}$ – деяка куля в банаховому просторі X , $A: B_R \rightarrow X$ – неперервний компактний оператор. Нехай також рівняння з параметром $Au = \lambda u$, $\lambda > 1$ не має розв'язків на сфері $\|u\| = R$. Тоді оператор A має в $\overline{B_R}$ нерухому точку.

Перша крайова задача для квазілінійного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Розглянемо далі першу крайову задачу для квазілінійного рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a(t)x(t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (2)$$

Із курсу звичайних диференціальних рівнянь відомо, що за умови лінійності задачі (1), (2), тобто $f(x, t) = f(t)$, розв'язок можна подати у зручному вигляді за допомогою функції Гріна.

$$x(t) = \int_0^1 G(\tau, t) f(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Функція Гріна буде існувати за умов, якщо $a(t) \in C[0, 1]$ та відповідна однорідна задача має тільки тривіальний розв'язок. Зазначимо, що одним із критеріїв тривіальності розв'язку однорідної задачі є умова $a(x) \geq 0$, $x \in (0, 1)$.

Якщо розглядати нелінійну задачу, то з (3) отримуємо не явний вигляд розв'язку, а операторне рівняння:

$$x(t) = \int_0^1 G(\tau, t) f(x(\tau), \tau) d\tau. \quad (4)$$

Отже, якщо праву частину (4) позначити за оператор

$$Ax(t) = \int_0^1 G(\tau, t) f(x(\tau), \tau) d\tau,$$

отримаємо задачу для знаходження нерухомої точки оператора A :

$$x(t) = Ax(t). \quad (5)$$

Теорема 3. Нехай $a(t) \in C[0,1], a(t) \geq 0, \forall t \in [0,1], f(x,t) \in C\{(x,t) : x \in R^1, t \in [0,1]\}$ та задовольняє умову зростання за x

$$|f(x,t)| \leq C(1 + |x|^\alpha), \alpha \in (0,1) \quad (6)$$

Тоді задача (1), (2) має розв'язок у просторі $C^2[0,1]$.

Доведення. За допомогою теореми 2 покажемо існування нерухомої точки – розв'язку (5). За банахів простір візьмемо $X = C[0,1]$. Перевіримо умову $A : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$. Нехай $x(t) \in C[0,1], Ax(t) = \int_0^1 G(\tau, t) f(x(\tau), \tau) d\tau$. Перевіримо компактність та неперервність оператора A . Представимо A у вигляді композиції $A = I \circ N$, де N – оператор Немицького, що визначається за функцією:

$$f : (Nx)(t) = (N_j x)(t) = f(x(t), t),$$

а I – інтегральний оператор, ядром якого є функція Гріна крайової задачі (1), (2):

$$Iu(t) = \int_0^1 G(\tau, t) u(\tau) d\tau.$$

Із курсу функціонального аналізу відомо, що оператор I з неперервним ядром є неперервним і компактним. Оператор N є неперервним. Оскільки $A = I \circ N$, тобто A є композицією неперервних, то A – неперервний. До того ж I – компактний, а отже A – компактний оператор, композиція неперервного і компактного.

Залишилося перевірити умову теореми 2: $\|Ax\| \leq R$ за умови $\|x\| = R$ для деякого $R > 0$. Розглянемо:

$$\left| \int_0^1 G(\tau, t) f(x(\tau), \tau) d\tau \right| \leq C \max_t \int_0^1 |f(x(\tau), \tau)| d\tau \leq C \int_0^1 (1 + |x|^\alpha) d\tau \leq C \int_0^1 (1 + (\max_t |x|)^\alpha) d\tau = C \int_0^1 (1 + \|x\|^\alpha) d\tau = C(1 + R^\alpha). \quad (7)$$

Тут обмеженість функції Гріна на $[0,1] \times [0,1]$ деякою константою $C > 0$ впливає з неперервності цієї функції та теореми Вейєрштрасса про рівномірну обмеженість неперервних на компактній множині функцій. Для виконання нерівності $\|Ax\| \leq R$ необхідно вибрати R так, щоб

$$C(1 + R^\alpha) \leq R \text{ або } C\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R^{1-\alpha}}\right) \leq 1.$$

Останню нерівність можна задовольнити для будь-якої $C > 0$ і досить великого $R > 0$, оскільки $\alpha \in (0, 1)$. Отже, усі умови теореми 3 виконано; отже, у оператора A існує в $X = C[0,1]$ нерухома точка, яка є розв'язком крайової задачі (1), (2). Доведемо, що цей розв'язок належить простору $C^2[0,1]$.

Дійсно, якщо $\tilde{x}(t) \in C[0,1]$ – розв'язок задачі (1), (2), то рівняння (1) на ньому перетворюється у тотожність:

$$\frac{d^2 \tilde{x}(t)}{dt^2} \equiv f(\tilde{x}, t) + a(t) \tilde{x}(t). \quad (8)$$

За умов теореми права частина (8) є неперервною за t -функцією, отже, $\tilde{x}''(t) \in C[0,1]$ і, таким чином, $\tilde{x}(t) \in C^2[0,1]$. Теорему доведено.

Зауважимо, якщо умова $a(t) \geq 0, x \in (0,1)$ не виконується, то задача (1), (2) може не мати розв'язків. Це доводить наступний приклад. Спробуємо розв'язати задачу:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \pi^2 x(t) = \sin \pi t, x(0) = x(1) = 0. \quad (9)$$

Загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$x(t) = C_1 \cos \pi t + C_2 \sin \pi t - \frac{t}{2\pi} \cos \pi t.$$

Знайдемо C_1, C_2 з граничних умов

$$x(0) = C_1 = 0, \quad x(1) = C_2 \sin \pi - \frac{1}{2\pi} \cos \pi = 0.$$

Очевидно, що розв'язків відносно C_1 і C_2 ця система не має. Отже, задача (1), (2) не завжди має розв'язок, навіть за умови $a(t) \geq 0$. Треба ще контролювати зростання нелінійної функції $f(x, t)$ за x , бо приклади показують, що за умови лінійного зростання функції $f(x, t)$ за x розв'язок може не існувати. Розглянемо задачу (1), (2) з

$$f(x, t) = \sin \pi t - \pi^2 x, a(t) = 0.$$

Отже, маємо задачу (9), що не має розв'язків.

Висновки. У роботі показано, що теореми про нерухомі точки є одним із найпотужніших інструментів доведення існування розв'язків нелінійних рівнянь та крайових задач. На прикладі задачі другого порядку продемонстровано застосування теореми Шаудера до побудови розв'язку у просторі неперервних функцій. Підтверджено, що компактність і неперервність відповідного оператора забезпечують виконання умов існування нерухомої точки, яка відповідає шуканому розв'язку задачі. Доведено, що умови зростання нелінійної частини рівняння суттєво впливають на можливість існування розв'язку. Отримані результати узгоджуються з класичними положеннями функціонального аналізу та узагальнюють підходи, представлені у працях провідних математиків – Брауера, Шаудера, Фучика, Ліона, Скрипника та інших. Отже, використання теорем про нерухомі точки залишається ефективним і сучасним методом для аналізу складних нелінійних операторних рівнянь та їх прикладних задач у математичній фізиці.

Abstract. The paper examines the application of fixed point theorems to proving the existence of solutions for non-linear boundary value problems. The Brouwer and Schauder theorems are considered, examples of the use of compact operators in functional spaces are provided, and the influence of nonlinear growth conditions on the existence of a solution is demonstrated.

Keywords: fixed point; Brouwer theorem; Schauder theorem; nonlinear differential equations; functional analysis; boundary value problem; compact operator.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Lions J.-L. Quelques methodies de resolution des problemes aux limites non lineaire. Paris, 1969. 587 p.
2. Fucik S., Kufner A. Nonlinear Differential Equations. Elsevier, 2014. 360 p.
3. Gajewski H., Groger K., Zacharias K. Nichtlineare operatorgleichungen ond operatorifferentialgleichungen. Berlin, 1974.
4. Berezansky Y., Sheftel Z., Us G. Functional Analysis. Birkhausen, 1996.
5. Шпраменко В. М., Буряченко К. О., Лиманський Д. В. Застосування нелінійного функціонального аналізу до теорії диференціальних рівнянь: навчальний посібник. Донецьк: ДонНУ, 2011. С. 72–75.
6. Скрипник І. В. Нелінійний операторний аналіз. Київ: Наукова думка, 1977. 452 с.

УДК 378.147:005.92(477)

СУЧАСНИЙ СТАН ДОКУМЕНТАЦІЙНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ В ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ ОСВІТИ

В. І. Нелюбій, О. В. Прігунов

Анотація. У статті проведено аналіз сучасного стану документаційного забезпечення в закладі вищої освіти, зокрема розглянуто організацію діловодства, наявність і актуальність номенклатури справ, а також рівень автоматизації документаційних процесів. Визначено основні проблеми, серед яких – відсутність щорічного оновлення номенклатури справ, часткова невідповідність її структури функціональним особливостям закладу, недостатня інтеграція електронного документообігу та відсутність єдиної СЕД. На основі аналізу запропоновано перспективні напрями вдосконалення документаційного забезпечення, зокрема впровадження єдиної системи електронного документообігу, створення електронного архіву, розроблення актуалізованої номенклатури справ і підвищення кваліфікації працівників діловодної служби.

Ключові слова: документаційне забезпечення, номенклатура справ, заклади вищої освіти.

Вступ. У сучасному світі знання та інформація стають ключовими ресурсами, а ефективність управління значною мірою залежить від якості інформаційних потоків. У закладах вищої освіти документи – це носії не лише адміністративної інформації, але й доказової бази