

3. Анісімова О. М., Лукаш Г. В. Формування системи документно-інформаційного забезпечення в умовах цифрових комунікацій. *Прикладні аспекти сучасних міждисциплінарних досліджень*: збірник матеріалів II Міжнародної науково-практичної конференції, м. Вінниця, 24 лист. Вінниця, 2024. С. 9–11.

4. Трансформаційні процеси у суспільній та соціокультурній сферах України: монографія / відп. за вип. Т. М. Яворська. Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2021. 176 с.

5. Марковець О. В., Горова В. О., Бойко П. О. Створення електронного архіву закладу вищої освіти: особливості оцифрування службових документів та програмна реалізація інформаційного ресурсу. *Вісник Харківської державної академії культури*. 2024. № 26. С. 208–226. DOI: 10.31516/2410-5333.065.15 (дата звернення: 10.10.2025).

УДК 517.9

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ СТИСЛИХ ВІДОБРАЖЕНЬ У ДОСЛІДЖЕННЯХ ПРОБЛЕМИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ПАРАМЕТРОМ

В. Р. Орищук, К. О. Буряченко

Анотація. Робота присвячена застосуванню принципу стислих відображень до операторних рівнянь із параметром.

Ключові слова: нерухома точка, принцип стислих відображень, операторні рівняння.

Вступ. Що таке нерухома точка і як з'явилося це поняття? Пояснення нерухомої точки отримуємо із розв'язування функціональних рівнянь вигляду $f(x)=x$, наприклад: $\sin x = x$; $e^x = x$; (і це тільки функціональні рівняння, не говорячи уже про диференціальні). Розв'язати деякі з них аналітично не вдається. Тому спочатку виникає питання існування розв'язків таких рівнянь. Насправді, багато рівнянь, практичних задач у математиці (функціональному аналізі та програмуванні, лінійній алгебрі), фізиці, економіці зводяться ось до такої моделі, де деяка точка, попри перетворення, лишається на своєму місці.

Принцип стислих відображень, теореми Шаудера і Брауера є фундаментальними результатами про нерухому точку. Водночас, станом на зараз, різноманітність наявних теорем про нерухому точку дуже велика і стосується різних типів відображень та навіть просторів, які не є метричними [3].

Нагадаємо основні поняття з функціонального аналізу, які будуть використані у цій роботі.

Означення 1. Метрика [1]. Метрика – це така функція відстані двох аргументів $\rho(x, y)$, де $x, y \in X$ – деяка множина, що $(\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R})$ і для якої виконуються такі аксіоми:

1) $\rho(x, y) \geq 0$ для всіх $x, y \in X$; водночас з $\rho(x, y) = 0$ випливає $x = y$, і навпаки, з умови $x = y$ випливає $\rho(x, y) = 0$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всіх x, y із X – аксіома симетричності;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(x, y)$ для всіх x, y із X – аксіома трикутника.

Означення 2. Метричний простір [1]. Метричний простір – це пара (X, ρ) , де X – деяка множина, на якій задана метрика ρ .

Наприклад, метричним простором буде $(\mathbb{R}, \rho)$, де $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел із метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$.

Означення 3. Нерухома точка [1]. Нерухома точка – це така точка $x_0 \in X$, для якої виконується рівність $f(x_0) = x_0$, де f – відображення деякого метричного простору X в себе.

Означення 4. Стислі відображення [1]. Стислим відображенням деякого метричного простору (X, ρ) в себе називатимемо таке відображення $f: X \rightarrow X$, для якого виконується зазначена властивість:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y), \forall x, y \in X,$$

де $0 < q < 1$ називається коефіцієнтом стиску.

Теорема 1. Принцип стислих відображень [2]. Нехай $f: (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ стисле відображення, яке діє в повному метричному просторі (X, ρ) . Тоді існує єдиний елемент $x^* \in X$, який є нерухомою точкою відображення $f: f(x^*) = x^*$. До того ж послідовні ітерації

$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, 3, \dots$, збігаються до нерухомої точки x^* . За такої умови можна дати таку оцінку похибки: $\rho(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \rho(x_0, x_1)$.

Змістовно ілюструє цей принцип такий приклад. Якщо ми візьмемо карту певної місцевості і прийдемо на якусь її точку, а потім знайдемо відповідну точку на карті, то вона буде вважатися нерухомою точкою (причому тільки єдиною, поки ми залишаємося на тому ж місці). Карта є результатом неперервного стислого відображення, що застосовується до повного тривимірного метричного простору поверхні цієї місцевості. Можна вчинити й інакше. Поставити карту на цю місцевість. Вибрати точку на місцевості, знайти їй відповідну точку на карті, якщо вони не збігаються, то візьмемо точку місцевості, що лежить під знайденою точкою на карті. І знову знайдемо відповідну точку на карті. Якщо вони не збіглися, то вчинимо те саме, поки не прийдемо до нерухомої точки. Це якраз саме ті послідовні ітерації, про які говориться у принципі стискаючих відображень: x_0 – вибрана точка на місцевості, $x_1 = f(x_0)$ – відповідна точка на карті. Далі ми беремо цю точку, як точку на місцевості, і шукаємо відповідну їй на карті: $f(x_1) = x_2$ і т. д. Але ми так і не отримаємо нерухому точку, а зможемо лише оцінити похибку за нерівністю, наведеною в останній теоремі.

Застосування принципу стислих відображень в дослідженнях проблеми розв'язності операторних рівнянь із параметром.

Розглянемо задачу знаходження розв'язку рівняння $(Ax)(t) = x(t)$ з інтегральним оператором

$$(Ax)(t) = \lambda \int_0^1 t^2 s^2 x(s) ds + t.$$

Будемо вважати, що оператор $(Ax)(t)$ діє в повному метричному просторі $C[0,1]$ з метрикою

$$\rho(x(t), y(t)) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(s) - y(s)|.$$

Знайдемо всі значення параметра λ , за яких відображення $(Ax)(t)$ є стиском, тобто задовольняє умову Теорема 1. Для цього потрібно довести виконання нерівності $\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y)$ для коефіцієнту $0 < q < 1$.

$$\rho(f(x), f(y)) = \rho(Ax(t), Ay(t)) = \max_{0 \leq t \leq 1} |Ax(t) - Ay(t)|.$$

Розглянемо окремо $|Ax(t) - Ay(t)|$:

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ay(t)| &= \left| \lambda \int_0^1 t^2 s^2 x(s) ds + t - \lambda \int_0^1 t^2 s^2 y(s) ds + t \right| \leq |\lambda| \left| \int_0^1 t^2 s^2 (x(s) - y(s)) ds \right| \\ &\leq |\lambda| t^2 \int_0^1 s^2 \max_{0 \leq t \leq 1} |x(s) - y(s)| ds \leq |\lambda| t^2 \int_0^1 s^2 \rho(x(t), y(t)) ds \\ &\leq |\lambda| t^2 \rho(x(t), y(t)) \int_0^1 s^2 ds = |\lambda| t^2 \rho(x(t), y(t)) \frac{s^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{|\lambda|}{3} t^2 \rho(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Тепер підставимо це:

$$\begin{aligned} \rho(Ax(t), Ay(t)) &= \max_{0 \leq t \leq 1} |Ax(t) - Ay(t)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{|\lambda|}{3} t^2 \rho(x, y) = \\ &= \frac{|\lambda|}{3} (\max_{0 \leq t \leq 1} t^2) \rho(x, y) = \frac{|\lambda|}{3} 1 \rho(x, y). \end{aligned}$$

І згадуємо, що ця метрика повинна бути меншою-рівною добутку $q\rho(x, y)$, тому $\rho(Ax(t), Ay(t)) \leq \frac{|\lambda|}{3} \rho(x, y) = q\rho(x, y)$, звідси і маємо, що $\frac{|\lambda|}{3} = q$, а оскільки $0 < q < 1$, то $0 < \frac{|\lambda|}{3} < 1$ або $|\lambda| < 3$. Це означає, що зазначене відображення $(Ax)(t)$ є стиском для $-3 < \lambda < 3$. А відповідне операторне рівняння з інтегральним оператором $(Ax)(t), (Ax)(t) = x(t)$ буде мати лише один розв'язок (одну нерухому точку).

Висновки. Отже, з нерухомою точкою пов'язано багато задач сучасної науки, техніки, виробництва. Нерухома точка – це особливий випадок відображення деякої множини, за якої точка не змінюється. Часто знаходити одразу нерухому точку звичайними методами не вдається. Тому спочатку з'ясовується, чи є вона взагалі. Для цього дуже часто використовується принцип стискаючих відображень, зокрема, в дослідженнях проблеми розв'язності операторних рівнянь із параметром, що і було продемонстровано в роботі.

Abstract. The work is devoted to the application of the principle of compressive mappings to the operator equations with parameter.

Keywords: fix point, principle of compressive mappings, operator equations.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Методи розв'язання задач із функціонального аналізу. Частина 1. Метричні, нормовані та гільбертові простори. Методичний посібник для здобувачів спеціальностей 111 Математика, 113 Прикладна математика / В. О. Деркач, К. О. Буряченко. Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2024. 50 с.
2. Шраменко В. М., Буряченко К. О., Лиманський Д. В. Застосування нелінійного функціонального аналізу до теорії диференціальних рівнянь: навч. посіб. Донецьк: ДонНУ, 2011. 184 с.
3. Bisht R. K., Petrov E. O. Fixed point theorems for weak, partial, Bianchini, and Chatterjea-Bianchini contractions in semimetric spaces with triangle functions. *Journal of Mathematical Sciences*. 2024. № 285(5). P. 652–665. DOI: 10.1007/s10958-024-07463-9.

УДК 025.31:004:006

СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО УНІФІКАЦІЇ ПОЗАТЕКСТОВИХ БІБЛІОГРАФІЧНИХ ПОСИЛАНЬ

Д. М. Поліщук, О. М. Анісімова

Анотація. У статті розглянуто проблему неузгодженості форматів бібліографічних посилань як ключову перешкоду в ефективному обміні науковою інформацією та дотриманні академічної доброчесності. Визначено, що розбіжності в оформленні позатекстових посилань обмежують інтероперабельність аналітичних та видавничих систем, а уніфікація є критичною умовою для автоматизації процесів цитування.

Ключові слова: бібліографічне посилання, уніфікація, бібліографічні менеджери, автоматизація

Вступ. Серед критичних елементів наукової праці, які потребують стандартизації, особливе місце посідають позатекстові бібліографічні посилання. Різноманіття форматів бібліографічних посилань ускладнює автоматизоване опрацювання даних науковими системами та перешкоджає їх коректній взаємодії, що вказує на критичну необхідність уніфікації. Отже, пошук та імплементація сучасних підходів до уніфікації бібліографічних посилань стає нагальною проблемою, що визначає ефективність наукової діяльності в умовах цифрової трансформації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження праць Л. О. Пономаренко, Т. Л. Новицької, О. М. Анісімової та Т. М. Яворської, а також профільних видань і стандартів, зокрема ДСТУ 8302:2015, підтверджують критичну необхідність уніфікації бібліографічних посилань у сучасній науковій комунікації та висвітлюють практичні підходи до розв'язання цієї проблеми, зокрема через застосування бібліографічних менеджерів та вдосконалення бібліотечних послуг.

Мета статті – проаналізувати сучасні підходи до уніфікації позатекстових бібліографічних посилань, надати рекомендації щодо практичного застосування бібліотечних менеджерів.

Постановка проблеми. Головною перешкодою в ефективному обміні науковою інформацією є невідповідність форматів бібліографічних посилань. Розбіжності в оформленні позатекстових посилань у наукових текстах, управлінській документації та цифрових системах ускладнюють їх автоматизований аналіз і верифікацію. Відсутність універсального стандарту має подвійний негативний ефект: вона знижує академічну доброчесність (через ускладнену ідентифікацію джерел) і обмежує інтероперабельність між аналітичними та видавничими си-