

Abstract. The article discusses the problem of inconsistency in bibliographic reference formats as a key obstacle to the effective exchange of scientific information and compliance with academic integrity. It is determined that discrepancies in the formatting of extratextual references limit the interoperability of analytical and publishing systems, and that unification is a critical condition for the automation of citation processes.

Keywords: bibliographic reference, unification, bibliographic managers, automation.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ковтун Л. П. Сучасні бібліотечні послуги та сервіси. *Інформаційні технології і системи в документо-знавчій сфері*: матеріали X Всеукраїнської наукової студентської конференції, м. Вінниця, 11 квіт. 2025. Вінниця, 2025. С. 109–111.
2. ДСТУ 8302:2015. Інформація та документація. Бібліографічне посилання. Загальні положення та правила складання. Київ: УкрНДІП, 2017. 24 с.
3. Пономаренко Л. О. Оформлення позатекстових бібліографічних посилань у наукових роботах за ДСТУ 8302:2015 та стилем APA (7-ме видання). *Державна науково-педагогічна бібліотека України імені В. О. Сухомлинського*. URL: https://dnppb.gov.ua/wp-content/uploads/2021/05/Ponomarenko_L_Oformlennya_pozatextovoykh_posylan_2021.pdf (дата звернення: 01.10.2025).
4. Батаєва Є. Оформлення наукових джерел – нічне жахіття більшості вчених. *НАУКА та МЕТРИКА*. 2020. URL: <https://nim.media/articles/mizhnarodni-stili-oformlennya-dzherel-naukovikh-publikatsiy> (дата звернення: 08.10.2025).
5. Анісімова О., Яворська Т. Стратегічне управління в діяльності бібліотек. *Вісник Книжкової палати*. 2024. Т. 3. С. 37–45. URL: <https://r2.donnu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/f4301bfe-eea6-44b4-8a8a-db0a0806554f/content> (дата звернення: 10.10.2025).
6. Reddy R. 7 Best AI Reference Manager Tools in 2025. *Paperguide Blog*. 2025. URL: <https://paperguide.ai/blog/ai-reference-manager-tools/> (дата звернення: 10.10.2025).
7. Бібліографічні менеджери. *Наукова бібліотека Запорізького державного медико-фармацевтичного університету*. URL: https://lib.mphu.edu.ua/p_bibliografichni_menedzhery.html (дата звернення: 10.10.2025).
8. Zotero, або те, з чого варто починати знайомство з референс-менеджерами. Технології для науковців. *WordPress*. URL: <https://techsforwriting.wordpress.com/2016/08/24/zotero-або-те-з-чого-варто-починати-знайомс/> (дата звернення: 10.10.2025).
9. Reference Manager Showdown (2025 Edition): Zotero vs. Mendeley vs. EndNote. *Custom Dissertations Service*. URL: <https://customdissertationservice.com/reference-manager-showdown-2025-edition-zotero-vs-mendeley-vs-endnote/> (дата звернення: 10.10.2025).
10. Давиденко І. Гайд із програмних забезпечень для роботи з бібліографічними списками (Zotero, Mendeley, EndNote). *НАУКА та МЕТРИКА*. 2021. URL: <https://nim.media/articles/gayd-z-programnikh-zabezpechen-dlya-roboti-z-bibliografichnimi-spiskami-zotero-mendeley-endnote> (дата звернення: 10.10.2025).
11. Новицька Т. Л. Бібліографічні менеджери у роботі з електронною бібліотекою Національної академії педагогічних наук України. *Мультимедійні технології в освіті та інших сферах діяльності: IX науково-практична конференція з міжнародною участю*, м. Київ, 2018. С. 54–55. URL: <https://core.ac.uk/reader/162002190> (дата звернення: 10.10.2025).

УДК 519.866:005.8

ЕЛЕМЕНТИ ОПТИМІЗАЦІЇ У ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

А. І. Родюк, А. В. Луценко

Анотація. У статті проаналізовано застосування методів лінійної оптимізації, зокрема цілочисельного лінійного та цілочисельного цільового програмування, для задач управління портфелем проєктів. Розглянуто підходи до формалізації обмежень і цілей, враховуючи фінансові, ресурсні, ризикові та часові фактори. Запропоновано математичні моделі, що дозволяють знаходити оптимальний набір проєктів відповідно до заданих критеріїв. Результати демонструють ефективність математичних методів в ухваленні рішень.

Ключові слова: лінійна оптимізація, цілочисельне лінійне програмування, цільове програмування, цілочисельне цільове програмування.

Вступ. У сучасних умовах постійного зростання складності управлінських процесів усе більшого значення набувають інструменти здатні підвищити ефективність ухвалення рішень. Підприємства, організації, державні установи та навіть окремі особи постійно стикаються з необхідністю вибору серед багатьох можливих альтернатив. За таких умов надзвичайно важливим є використання інструментів, що дозволяють систематизувати, формалізувати та обґрунтовувати процес ухвалення рішень. Елементи математичної оптимізації, зокрема лінійне

та цілочисельне програмування, дедалі частіше застосовуються в задачах прикладного змісту – від планування проєктів до управління ресурсами, бюджетами, ризиками тощо.

Особливе місце у прикладних дослідженнях посідає управління портфелем проєктів. Керівникам організацій необхідно обирати оптимальний набір проєктів, виходячи з певних факторів, зокрема фінансового, ресурсного, часового, ризикового та кадрового. У таких умовах постає складна багатоцільова задача, для розв'язання якої класичних методів інтуїтивного вибору або евристики недостатньо. Саме тут математична оптимізація демонструє свою ефективність, дозволяючи не лише визначити найкращий варіант серед альтернатив, а й врахувати множину обмежень і цілей.

Попри наявність значного масиву наукових праць, залишається актуальним завдання адаптації певних методів до конкретних задач прикладного змісту. Йдеться про уточнення постановки задачі, формалізацію обмежень, облік множинності цілей і забезпечення практичної реалізації моделей із використанням доступних інструментів, наприклад MS Excel Solver.

Отже, **актуальність статті** полягає в поєднанні зростаючої складності управлінських процесів із необхідністю формалізованих підходів до ухвалення рішень. У цьому контексті аналіз застосування елементів оптимізації, таких як цілочисельне лінійне та цілочисельне цільове програмування, набуває не лише теоретичної, а й практичної значущості.

Метою статті є аналіз застосування окремих елементів оптимізації – цілочисельного лінійного та цілочисельного цільового програмування у задачах прикладного змісту, зосереджених на виборі проєктів за різними критеріями в умовах обмежених ресурсів.

Основний розділ. *Лінійна оптимізація* – це математичний метод, який використовується для знаходження найкращого рішення у моделі, де всі умови та цільова функція виражені лінійними залежностями. *Лінійна оптимізаційна задача* – це оптимізаційна задача, у якій ми мінімізуємо (або максимізуємо) лінійну функцію на опуклому багатограннику. За такої умови функція, яку ми мінімізуємо (або максимізуємо), та обмеження можуть бути описані лінійними функціями.

У деяких задачах лінійної оптимізації крім змінних, що набувають тільки цілочисельних значень (так звані обмеження цілісності), або навіть лише значень 0 або 1, необхідні додаткові умови. У такому випадку ми говоримо про *цілочисельне лінійне програмування*. Ці задачі набагато складніше розв'язувати, ніж задачі лінійної оптимізації з безперервними змінними.

Задача цілочисельного лінійного програмування не є задачею лінійної оптимізації в тому сенсі, що її допустима область не є багатогранником, а є дискретним набором точок. Однак її можна описати як задачу лінійної оптимізації з додатковими обмеженнями, згідно з якими деякі змінні можуть набувати тільки цілочисельних значень. Розрізняють змішане цілочисельне лінійне програмування з цілочисельними та безперервними змінними, та цілочисельну задачу з усіма цілочисельними змінними.

Цільове програмування є галуззю комбінаторної оптимізації [1], особливістю якої є спроба одночасно оптимізувати кілька цілей в одній задачі (на відміну від лінійної оптимізації та цілочисельного лінійного програмування, де оптимізується одна ціль).

У методі *цілочисельного цільового програмування* застосовується той самий принцип, за винятком області визначення рішення: ми додаємо додаткові обмеження, згідно з якими змінні можуть набувати тільки цілочисельних значень або навіть лише двох значень 0 або 1 залежно від характеру задачі, і в цьому випадку це називається *0–1 цільовим програмуванням* [2].

Чисельні методи оптимізації можуть бути використані в декількох областях, включаючи переважно сферу управління. У сфері управління проєктами було використано декілька математичних методів оптимізації: цільове програмування було використано Санг Лі та Девідом Л. Олсоном (1984) для планування проєктів, що відповідають декільком цілям: мінімізація часу виконання, дотримання термінів та мінімізація використовуваних ресурсів; змішане цілочисельне квадратичне програмування було використано Робертом Террі та Дар-Елем (1982) для стратегічного планування декількох проєктів з урахуванням дати завершення та кількості доступних ресурсів для кожного проєкту; цілочисельне лінійне програмування було використано Коліном О. Бенджаміном (1987) для планування оптимальних бюджетів інвестиційних

проектів. У сфері управління портфелем проектів математичні методи оптимізації використовувалися здебільшого для розв'язання проблеми вибору проектів [3] або вибору портфеля, що відповідає заздалегідь визначеним цілям [4].

Процес відбору проектів може бути здійснений за допомогою методів математичної оптимізації. Основна задача лінійної оптимізації полягає в максимізації або мінімізації цільової функції за умови дотримання певних обмежень.

Формулювання задачі лінійної оптимізації полягає у визначенні змінних рішення, цільової функції та обмежень. У статті [5] представлено два приклади застосування методів оптимізації в управлінні портфелем проектів: цілочисельне лінійне програмування, коли особа, що ухвалює рішення, зосереджується на одній цілі та цілочисельне цільове програмування, коли особа, що ухвалює рішення, враховує кілька цілей.

Пріоритизація проектів у портфелі – це класифікація проектів за співвідношенням витрат і вигод. Однак критерії, на яких базується це співвідношення, ґрунтуються не тільки на фінансових аспектах (витратах і вигодах), а й впливають на всі зусилля, спрямовані на успішну реалізацію проекту. Отже, розрізняють два типи витрат (прямі – відчутні та непрямі – приховані) і два типи вигод (прямі та приховані). Нижче наведено два узагальнені приклади з статті [5] застосування методів оптимізації.

Застосування методу цілочисельного лінійного програмування. Нехай деяка компанія K хоче вибрати один з n проектів ($n \in \mathbb{N}$), який принесе їй максимальний фінансовий прибуток (прибуток, виражений у грошовому еквіваленті за вирахуванням вартості капіталу). Позначимо доступний бюджет F . Нехай $X = \{x_{ij} | i, j \in \overline{1, n}\}$ – множина доступних проектів, де j показує сумісність проектів: якщо для двох проектів $x_{i_1 j_1}$ та $x_{i_2 j_2}$, за умови $i_1 \neq i_2, j_1 = j_2$, то якщо вибрано один проект, то другий також має бути вибраний, а якщо за $i_1 \neq i_2, j_1 \neq j_2$, то проекти еквівалентні і якщо один з них буде обраний, інший не повинен бути обраний.

Тоді обмеження залежності проектів можна виразити як

$$x_{i_1 j_1} = x_{i_2 j_2}, \quad (1)$$

а еквівалентність проектів:

$$x_{i_1 j_1} + x_{i_2 j_2} \leq 1. \quad (2)$$

Нехай $P = \{p_i | i \in \overline{1, n}\}$ – множина, що показує вигоду кожного з проектів із множини X , а $B = \{b_i | i \in \overline{1, n}, b_i \leq F\}$ – множина, що показує бюджет кожного з проектів із множини X . Визначимо бієктивне відображення між елементами множин X, P та B таким способом:

$$R : X \times P \times B \rightarrow \{(x_i, p_i, b_i) | i \in \overline{1, n}\},$$

тоді елементи відображення R показують номер проекту, його вигоду та бюджет. Визначимо характеристичну функцію $f: R \rightarrow \{0, 1\}$:

$$f(x_i, p_i, b_i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо проект } x_i \text{ обрано,} \\ 0, & \text{у протилежному випадку;} \end{cases} \quad (3)$$

цільову функцію g :

$$g_{\max} x_i = p_i \cdot x_i; \quad (4)$$

функцію бюджету h таким чином: $h(x_i) = b_i \cdot x_i$. Тоді обмеження на доступний бюджет можна записати виразом:

$$h_1(x_{i_1}) + h_2(x_{i_2}) + \dots + h_n(x_{i_n}) \leq F. \quad (5)$$

Результатом проблеми вибору проектів, який максимізує фінансову вигоду компанії K , є розв'язок рівнянь (1, 2, 3, 4 і 5). Для цього можна використати метод цілочисельного лінійного програмування в MS Excel Solver.

Застосування методу цілочисельного цільового програмування. Визначимо для попереднього прикладу такі цілі:

Ціль 1. Фінансовий прибуток від обраного портфельного проекту повинен бути більшим за D .

Ціль 2. Використання робочої сили не повинно перевищувати m осіб ($m \in \mathbb{N}$).

Ціль 3. Сума ризиків, пов'язаних із відібраними проєктами для портфеля, не повинна перевищувати r .

Ціль 4. Обмеження терміновості u певних проєктів (наприклад, проєкти, що мають високий ступінь терміновості, отримують пріоритет).

Нехай цих цілей всього $k \in \mathbb{N}$ (у даному випадку $k = 4$).

Припустимо $M = \{m_i | i \in \overline{1, n}\}$ – множина, що показує скільки осіб робочої сили необхідно для виконання кожного з проєктів; $R = \{r_i | i \in \overline{1, n}\}$ – множина, що показує ризики кожного з проєктів; $U = \{u_i | i \in \overline{1, n}\}$. Визначимо бієктивне відображення H таким способом:

$$H : X \times P \times B \times M \times R \times U \rightarrow \{(x_i, p_i, b_i, m_i, r_i, u_i) \mid i \in \overline{1, n}\},$$

тоді елементи відображення H показують номер проєкту, його вигоду, бюджет, кількість робочої сили, ризик та терміновість. Визначимо характеристичну функцію $f: R \rightarrow \{0, 1\}$:

$$f(x_i, p_i, b_i, m_i, r_i, u_i) = \begin{cases} 1, \text{ якщо проєкт } x_i \text{ обрано,} \\ 0, \text{ у протилежному випадку;} \end{cases}$$

Для кожної цілі j визначимо відповідне значення G_j та вагу P_j , що визначають ступінь важливості.

Присвоїмо кожному можливому рішення (набору обраних проєктів) дві змінні відхилення, визначені так: $V_p(j)$ – позитивна різниця між значенням, отриманим від обраних проєктів, та значенням цілі j . $V_n(j)$ – негативна різниця між значенням, отриманим від обраних проєктів, та значенням цілі j .

Цільова функція задачі є сумою відхилень цілей і може бути описана за допомогою наступної формули: $Min(Z) = \sum_{j=1}^k P_j \cdot V_j$, де $V_j = V_p(j)$, якщо потрібно мінімізувати ціль j , і $V_j = V_n(j)$, якщо потрібно максимізувати ціль j .

Тоді кожній цілі відповідає рівняння:

$$C_{ij}x_i + V_p(j) - V_n(j) = G_j, \quad (6)$$

де C_{ij} – внесок проєкту i у досягнення цілі j , що дорівнює одному із значень з множини $\{p_i, b_i, m_i, r_i, u_i\}$. Отже, з формули 6 маємо j рівностей, які можна розв'язати за допомогою MS Office Solver.

Висновки. У статті було розглянуто можливості застосування елементів математичної оптимізації для розв'язання задач прикладного змісту, зокрема – задачі вибору проєктів у портфелі. Проаналізовано підходи до формалізації таких задач у вигляді моделей цілочисельного та цілочисельного цільового програмування, з урахуванням практичних обмежень (фінансових, ресурсних, ризикових тощо); приклади моделей, реалізацію яких можна здійснити за допомогою MS Excel Solver.

Запропоновані підходи дозволяють враховувати як єдину ціль, так і множину цілей у процесі ухвалення рішень, що є особливо актуальним для реальних управлінських ситуацій. Разом із тим, спрощений характер моделей обумовлює необхідність подальших досліджень, зокрема в напрямі ускладнення постановки задач, врахування динаміки змін, стохастичних факторів і використання спеціалізованого програмного забезпечення для оптимізації складніших структур.

Важливо наголосити, що наведені моделі та приклади не вичерпують усього спектра можливостей математичної оптимізації. Сучасні виклики вимагають ускладнення моделей, включення динамічних параметрів, використання стохастичних факторів та багаторівневих систем обмежень. Також перспективним напрямом є інтеграція оптимізаційних методів із технологіями штучного інтелекту, машинного навчання та великих даних, що дасть поштовх до подальшої автоматизації й підвищення якості ухвалення рішень.

Не менш важливим є і те, що оптимізаційні підходи мають універсальний характер: вони застосовуються не лише у сфері управління проєктами, але й у виробництві, транспорті, енергетиці, охороні здоров'я, фінансах та багатьох інших галузях. Така міждисциплінарність підкреслює фундаментальну роль математики в розвитку сучасного суспільства й науки загалом.

Підбиваючи підсумки, можна зробити висновок, що навіть базові елементи оптимізації забезпечують суттєве підвищення ефективності управлінських процесів. Водночас подальші

дослідження й практичні розробки у цьому напрямі сприятимуть створенню більш гнучких, точних та адаптивних систем підтримки ухвалення рішень. Це підтверджує, що математична оптимізація залишається не лише актуальним, але й стратегічно важливим інструментом у розвитку сучасного науково-технологічного та економічного середовища.

Abstract. This paper analyzes the application of linear optimization methods, in particular integer linear and integer goal programming, to project portfolio management problems. Approaches to formalizing constraints and objectives are considered, taking into account financial, resources, risk, and time factors. Mathematical models are proposed that allow finding the optimal set of projects according to specified criteria. The results demonstrate the effectiveness of mathematical methods in decision-making.

Keywords: linear optimization, integer linear programming, goal programming, integer goal programming.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Nemhauser G., Wolsey L. Integer and Combinatorial Optimization. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 763 с.
2. Tripathy B. B., Biswal M. P. A zero-one goal programming approach for project selection. *Journal of Information and Optimization Sciences*. 2007. Т. 28, № 4. С. 619–626. DOI: 10.1080/02522667.2007.10699763 (дата звернення: 05.08.2025).
3. Caballero H. E. T. Project Portfolio Selection Using Mathematical Programming and Optimization Methods: doctoral dissertation. West Lafayette, Indiana, 2014. 172 с.
4. Urli B., Gbodossou A. Selection de portefeuille de projets: une approche pratique. *ASAC*. 2007. С. 28–42.
5. Tahri H. Mathematical Optimization Methods: Application in Project Portfolio Management. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. 2015. Т. 210. С. 339–347. DOI: 10.1016/j.sbspro.2015.11.374 (дата звернення: 05.08.2025).

УДК: 511.22:519.21

ДІОФАНТОВІ НАБЛИЖЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

К. О. Родюк, А. В. Луценко

Анотація. Робота присвячена питанню діофантових наближень – наближенню дійсних чисел раціональними або цілими. У роботі викладено основні принципи побудови таких наближень, описано алгоритм ланцюгових дробів, лему та теорему Діріхле, результати Ліувілля, Хінчіна і Туе–Зігеля–Рота. Розкрито зв'язок діофантових наближень із неперервними дробами, поняттям ступеня та точності наближення, а також розглянуто багатовимірні узагальнення. Матеріал аналізує фундаментальні підходи до оцінки похибок і дослідження властивостей ірраціональних чисел.

Ключові слова: діофантові наближення, раціональні числа, неперервні дробі, точність наближення.

Вступ. У сучасній математиці одним із ключових напрямів є методи наближеного представлення дійсних чисел раціональними, що отримали назву діофантових наближень. Ці методи беруть свій початок від класичних досліджень у теорії чисел, започаткованих Діофантом Александрійським, і стали центральною частиною аналітичної теорії чисел. Основна ідея діофантових наближень полягає в пошуку раціональних чисел, які якомога точніше передають задані ірраціональні величини, зокрема у вивченні меж таких наближень.

Важливість дослідження діофантових наближень пояснюється їх широким застосуванням у сучасній математиці та інформатиці. Вони відіграють значну роль у теорії алгоритмів, криптографії, вивченні трансцендентних чисел і числових рядів. Завдяки цим методам здійснюється оцінка точності числових обчислень, створення ефективних алгоритмів кодування та аналіз складних числових структур.

Незважаючи на тривалу історію, тематика діофантових наближень залишається однією з найактуальніших у теорії чисел. Вона охоплює як класичні результати таких видатних математиків, як Діріхле, Лежандр і Ліувілля, так і сучасні дослідження, пов'язані з метричною теорією наближень і багатовимірними узагальненнями. Отже, вивчення діофантових наближень не лише сприяє глибшому розумінню структури дійсних чисел, але й формує основу для розвитку багатьох суміжних математичних галузей.

Метою статті є узагальнення основних підходів до побудови діофантових наближень дійсних чисел раціональними, розкриття їх теоретичних основ та демонстрація застосування