

дослідження й практичні розробки у цьому напрямі сприятимуть створенню більш гнучких, точних та адаптивних систем підтримки ухвалення рішень. Це підтверджує, що математична оптимізація залишається не лише актуальним, але й стратегічно важливим інструментом у розвитку сучасного науково-технологічного та економічного середовища.

Abstract. This paper analyzes the application of linear optimization methods, in particular integer linear and integer goal programming, to project portfolio management problems. Approaches to formalizing constraints and objectives are considered, taking into account financial, resources, risk, and time factors. Mathematical models are proposed that allow finding the optimal set of projects according to specified criteria. The results demonstrate the effectiveness of mathematical methods in decision-making.

Keywords: linear optimization, integer linear programming, goal programming, integer goal programming.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Nemhauser G., Wolsey L. Integer and Combinatorial Optimization. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 763 с.
2. Tripathy B. B., Biswal M. P. A zero-one goal programming approach for project selection. *Journal of Information and Optimization Sciences*. 2007. Т. 28, № 4. С. 619–626. DOI: 10.1080/02522667.2007.10699763 (дата звернення: 05.08.2025).
3. Caballero H. E. T. Project Portfolio Selection Using Mathematical Programming and Optimization Methods: doctoral dissertation. West Lafayette, Indiana, 2014. 172 с.
4. Urli B., Gbodossou A. Selection de portefeuille de projets: une approche pratique. *ASAC*. 2007. С. 28–42.
5. Tahri H. Mathematical Optimization Methods: Application in Project Portfolio Management. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. 2015. Т. 210. С. 339–347. DOI: 10.1016/j.sbspro.2015.11.374 (дата звернення: 05.08.2025).

УДК: 511.22:519.21

ДІОФАНТОВІ НАБЛИЖЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

К. О. Родюк, А. В. Луценко

Анотація. Робота присвячена питанню діофантових наближень – наближенню дійсних чисел раціональними або цілими. У роботі викладено основні принципи побудови таких наближень, описано алгоритм ланцюгових дробів, лему та теорему Діріхле, результати Ліувілля, Хінчіна і Туе–Зігеля–Рота. Розкрито зв'язок діофантових наближень із неперервними дробами, поняттям ступеня та точності наближення, а також розглянуто багатовимірні узагальнення. Матеріал аналізує фундаментальні підходи до оцінки похибок і дослідження властивостей ірраціональних чисел.

Ключові слова: діофантові наближення, раціональні числа, неперервні дробі, точність наближення.

Вступ. У сучасній математиці одним із ключових напрямів є методи наближеного представлення дійсних чисел раціональними, що отримали назву діофантових наближень. Ці методи беруть свій початок від класичних досліджень у теорії чисел, започаткованих Діофантом Александрійським, і стали центральною частиною аналітичної теорії чисел. Основна ідея діофантових наближень полягає в пошуку раціональних чисел, які якомога точніше передають задані ірраціональні величини, зокрема у вивченні меж таких наближень.

Важливість дослідження діофантових наближень пояснюється їх широким застосуванням у сучасній математиці та інформатиці. Вони відіграють значну роль у теорії алгоритмів, криптографії, вивченні трансцендентних чисел і числових рядів. Завдяки цим методам здійснюється оцінка точності числових обчислень, створення ефективних алгоритмів кодування та аналіз складних числових структур.

Незважаючи на тривалу історію, тематика діофантових наближень залишається однією з найактуальніших у теорії чисел. Вона охоплює як класичні результати таких видатних математиків, як Діріхле, Лежандр і Ліувілля, так і сучасні дослідження, пов'язані з метричною теорією наближень і багатовимірними узагальненнями. Отже, вивчення діофантових наближень не лише сприяє глибшому розумінню структури дійсних чисел, але й формує основу для розвитку багатьох суміжних математичних галузей.

Метою статті є узагальнення основних підходів до побудови діофантових наближень дійсних чисел раціональними, розкриття їх теоретичних основ та демонстрація застосування

ключових результатів (леми та теореми Діріхле, теорем Ліувілля, Хінчіна і Туе–Зігеля–Рота) у дослідженні властивостей ірраціональних чисел та оцінці точності наближень.

Основна частина. Ідея діофантових наближень полягає у знаходженні раціональних чисел виду $\frac{p}{q}$, які максимально точно наближають задане дійсне число a , тобто повинна виконуватись рівність

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon, \text{ де } \varepsilon > 0.$$

Ця задача має глибокий зв'язок із теорією неперервних дробів, адже найкращі раціональні наближення до дійсних чисел можна побудувати саме через їх неперервні дроби.

Якщо $a = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$, то послідовність дробів $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ надає наближення a раціональними числами.

Нехай $a \in \mathbb{R}$, тоді діофантове наближення шукає цілі числа p та q ($q > 0$), такі, щоб похибка $\left| a - \frac{p}{q} \right|$ була мінімальною.

Але просто звести це значення до мінімуму недостатньо, тому що можна взяти q доволі великим, через що $\left| a - \frac{p}{q} \right|$ стане автоматично дуже малим. Тому вводять таке поняття, як ступінь наближення, тобто порівнюють $\left| a - \frac{p}{q} \right|$ з певною функцією від q .

Існує два типи оцінки точності наближень.

Перша – верхня оцінка – існує безліч раціоналів $\frac{p}{q}$, які надають високе наближення

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < f(q)$$

для певної функції $f(q)$ і для будь-якого числа q .

Друга – нижня оцінка – вона передбачає, що для кожного дробу виду $\frac{p}{q}$, виконується рівність

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| > \varphi(q)$$

для певної функції $\varphi(q)$.

Верхня та нижня межі описують наскільки значним може бути наближення числа.

Одним із ключових результатів у сфері діофантових наближень є лема Діріхле: для будь-якого дійсного числа a та довільного натурального N існують такі цілі числа p і q , що

$$1 \leq q \leq N, \quad \left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}.$$

Ця лема демонструє, що будь-яке число можна досить точно наблизити раціональними числами з обмеженим знаменником.

Що стосується ірраціональних чисел, рівень точності наближення може варіюватися. Якщо для певного числа a існує нескінченна кількість раціональних дробів $\frac{p}{q}$, таких, що

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Число a може добре наближатися раціональними числами.

У випадку певних чисел, як, наприклад, квадратичні ірраціональності, це наближення має свої обмеження. Натомість для трансцендентних чисел, таких як π або e , існують особливості, які вивчаються окремо. Діофантове наближення для числа π буде мати такий вигляд:

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right|.$$

Лема Діріхле розширюється на багатовимірні задачі, коли необхідно наблизити не одне число, а кілька одночасно. Нехай задано вектор дійсних чисел $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Завдання

полягає у знаходженні цілих чисел $p_1, p_2, \dots, p_n, q$, таких, що всі координати a_i можна одночасно наблизити раціональними дробами $\frac{p_i}{q}$ з малою похибкою

$$\left| a - \frac{p_i}{q} \right| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Багатовимірна теорема Діріхле формулює, що для будь-якого набору дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ та будь-якого натурального N існують такі цілі $q, p_1, p_2, \dots, p_n$, що

$$1 \leq q \leq N, \quad \max_{1 \leq i \leq n} |qa_i - p_i| < N^{-\frac{1}{n}}.$$

Ця нерівність демонструє, що навіть у багатовимірному просторі можна знайти раціональні наближення із заданим знаменником, які забезпечують контрольовану похибку.

Одним із ключових напрямів у розвитку теорії є метрична теорія діофантових наближень, яка досліджує, для яких дійсних чисел можливо досягти певних оцінок точності у разі наближення. Класичний результат, отриманий Дж. Хінчіним у 1924 році, свідчить, що для більшості дійсних чисел рівень точності наближення пов'язаний із властивостями функцій збіжності відповідних рядів.

Ще одним суттєвим внеском є теорема Ліувілля, яка вказує, що жодне алгебраїчне число a степеня $n > 1$ не може бути надто точно наближеним раціональними числами. Існує деяка константа $c(a) > 0$, така, що для будь-яких цілих чисел p та q :

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{c(a)}{q^n}.$$

Цей результат став першим прикладом трансцендентних чисел, які не є розв'язками жодного многочлена з цілими коефіцієнтами.

Для знаходження діофантових наближень також використовують теорему Туе–Зігеля–Рота (ця теорема покращила нижню межу). Нехай a – ірраціональне число. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує константа $c(a, \varepsilon)$, що для цілих p та q , $q > 0$ виконується така рівність:

$$\left| a - \frac{p}{q} \right| > \frac{c(a, \varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Отже, нижче рівня q^{-2} опуститися неможливо, незалежно від кількості ступенів. Це свідчить про те, що, хоча нескінченно багато наближень відповідають критерію (відповідно до теореми Діріхле), для алгебраїчних чисел отримати надто точні наближення, наприклад порядку $q^{-2-\varepsilon}$, практично нереально. Така межа вважається оптимальною у загальному випадку.

Для того, аби знаходити кращі наближення, використовують неперервні дроби. Будь-яке ірраціональне число a можна записати у вигляді нескінченного дроби $a = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$. Збіги

p_n/q_n забезпечують надзвичайно точні раціональні наближення. Ці збіги характеризуються добре відомими класичними властивостями:

$$\left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Також встановлено, що збіги є своєрідними «оптимальними наближеннями» у певному значенні, не існує іншого дроби $\frac{p}{q}$ із меншим значенням q та точнішим наближенням. Часом між збігами додають так звані півзбіги, щоб отримати інші варіанти наближень.

У діофантових наближеннях важливу роль відіграє оцінка точності наближення. Для цього застосовують абсолютну похибку. Вона знаходиться за формулою:

$$\theta = \left| a - \frac{p}{q} \right|,$$

чим меншою в результаті вийде θ , тим точнішим буде наближення. Для того, щоб врахувати масштаб числа використовується відносна похибка. Її знаходять за формулою:

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\left| a - \frac{p}{q} \right|}{|a|}.$$

Ця оцінка стає особливо корисною, коли необхідно порівнювати точність наближення для чисел різних порядків величини. Більш детальним є показник діофантового наближення $\mu(a)$, який характеризує швидкість покращення раціональних наближень числа зі збільшенням знаменника q . Його визначають за формулою:

$$\mu(a) = \limsup_{q \rightarrow \infty} \frac{-\log \left| a - \frac{p}{q} \right|}{\log q}.$$

Якщо $\mu(a) = 2$, то a є «звичайним» ірраціональним числом. Якщо $\mu(a) = \infty$, таке число називають числом Ліувілля, яке дозволяє надзвичайно точні раціональні наближення навіть за умови великих знаменників.

Існує ще одна оцінка, яка пов'язана з коефіцієнтом наближення

$$c(a, p, q) = q^2 \left| a - \frac{p}{q} \right|,$$

ця оцінка враховує знаменник.

Діофантові наближення використовуються, в першу чергу, у математиці. Вони відіграють важливу роль у методах, у яких потрібно правильно зазначити точність та витрати певних ресурсів. Також вони використовуються у дослідженнях поведінки функцій, де аргумент наближається до певного ірраціонального числа.

Діофантові наближення широко застосовуються у теорії чисел, зокрема можна дізнатися на скільки точно ірраціональні числа можна наблизити раціональними дробами. Наприклад, користуючись ними, було доведено, що константи π та e не є алгебраїчними.

Сьогодні діофантові наближення також застосовуються у криптографії. Їх використовують для розробки і аналізу систем шифрування для оцінки складності розв'язування рівнянь у цілих числах. Більша частина криптографічних алгоритмів базується на властивостях решіток. Завдяки діофантовим оцінкам гарантується безпека алгоритмів, тому що для розкриття секретного ключа потрібно знайти дуже точні раціональні наближення з мінімальною похибкою, а це є доволі складною для обчислення задачею.

Також вони використовуються у комп'ютерній графіці. Під час того як створюються різні анімації та зображення, часто потрібно знайти координати точок, які будуть містити велику точність, проте вони мають знаходитись у межах раціональних чисел, що буде зручнішим для машинного представлення. За допомогою діофантових методів можна мінімізувати похибку округлення числа, що важливо для певних геометричних обчислень, де потрібна точність.

Варто зазначити, що діофантові методи також зустрічаються в економіці. Завдяки ним можна спростувати розрахунки у фінансових моделях. Також в економіці є багато показників, які є ірраціональними, і для того щоб використати їх у математичних розрахунках, необхідно наблизити ці значення за допомогою раціональних чисел із певною точністю.

Висновок. У статті висвітлено ключові аспекти теорії діофантових наближень, проаналізоване її історичне підґрунтя та сучасні вектори розвитку. Обговорюються методи визначення найкращих раціональних наближень, а також значення базових результатів, зокрема теорем Діріхле та Ліувілля, у становленні сучасної теорії чисел. Зазначено, що вивчення діофантових наближень має не лише теоретичну вагу, а й важливе прикладне значення, зокрема у таких галузях, як обчислювальна математика та криптографія.

Особливу увагу приділено універсальності діофантових наближень як інструменту аналізу зв'язку між раціональними та ірраціональними числами. Вони дозволяють визначати граничну точність наближень і виявляти закономірності, що лежать в основі властивостей дійсних чисел. Подальші дослідження в цій галузі можуть сприяти глибшому розумінню структури числових полів, розвитку метричної теорії чисел, а також вдосконаленню алгоритмів для роботи з великими обсягами числових даних.

Abstract. The work is devoted to the problem of Diophantine approximations – the approximation of real numbers by rational or integer numbers. The work presents the basic principles of constructing such approximations, describes the algorithm of continued fractions, Dirichlet's lemma and theorem, and the results of Liouville, Hinchin, and Tue–Ziegel–Roth. It reveals the connection between Diophantine approximations and continued fractions, the concept of degree and accuracy of approximation, and considers multidimensional generalizations. The material analyzes fundamental approaches to error estimation and the study of the properties of irrational numbers.

Keywords: Diophantine approximations, rational numbers, continued fractions, approximation accuracy.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford: Oxford University Press, 2008.
2. Cassels J. W. S. An Introduction to Diophantine Approximation. Cambridge: Cambridge University Press, 1957.
3. Schmidt W. M. Diophantine Approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
4. Davenport H. The Higher Arithmetic: An Introduction to the Theory of Numbers. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

УДК 930.25:004.9:930.85:355.48

ЦИФРОВА АРХІВАЦІЯ ЯК ІНСТРУМЕНТ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІСТОРИЧНОЇ СПАДЩИНИ ПІД ЧАС ВІЙНИ

I. В. Стасишена, Г. П. Лукаш

Анотація. У статті проаналізовано сучасні методи цифрової архівації як ефективні засоби збереження історичних, культурних і документальних артефактів під час збройних конфліктів. Розглянуто переваги цифрових технологій для створення резервних копій, довготривалого зберігання та забезпечення доступу до матеріалів. На основі міжнародного досвіду й українських практик збереження культурної спадщини в умовах російсько-української війни визначено основні виклики, технічні рішення та організаційні стратегії. Окремо висвітлено питання захисту даних, верифікації цифрових копій і збереження нематеріальної культурної спадщини. Запропоновано рекомендації щодо розвитку національної системи цифрового архівування в умовах війни.

Ключові слова: цифрова архівація; культурна спадщина; історична спадщина; цифрові технології.

Вступ. Цифрова архівація, що набуває особливого значення в сучасних геополітичних реаліях, є інструментом збереження культурної та історичної спадщини України в умовах війни. Захист архівів, музейних колекцій і пам'яток від знищення є надзвичайно актуальним для збереження культурної ідентичності нації. Дослідження методів цифрової архівації та створення відповідної інфраструктури пов'язане з державними програмами і стратегічними завданнями розвитку країни. Гіпотеза полягає в тому, що застосування сучасних технологій не лише забезпечує збереження артефактів, а й відкриває можливості для їх вивчення, каталогізації та популяризації, сприяючи національній самосвідомості й міжнародній культурній інтеграції. Тема потребує ґрунтовного вивчення та вироблення методологічних підходів і технічних рішень для збереження спадщини в умовах ризику її втрати.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблематика цифрової архівації історичної спадщини в умовах війни привертає увагу багатьох дослідників. Теоретичні засади розглянуті у працях Н. Хрислової та І. Матяш, впровадження цифрових технологій – М. Палієнка, А. Кисельової та Г. Боряка, зарубіжний досвід – А. Майєр-Шенбергера, Г. Аппельбаума та К. Ціммермана. Технологічні аспекти оцифрування досліджували С. Кулешов і О. Гаранін, а міжнародну практику архівації в надзвичайних ситуаціях – Д. Браун, П. Ротенберг та В. Малковський [1, с. 176]. Водночас залишаються нерозв'язаними питання відсутності єдиної методології оцінки ризиків, технічних стандартів, координації інституцій та критеріїв пріоритетності, а також недосконалості правової бази. Додаткові виклики становлять технічні обмеження, підготовка кадрів і міжнародна співпраця у створенні резервних сховищ.

Мета статті – розробка методологічного підходу до цифрової архівації історичної спадщини України в умовах війни, що поєднує технологічні, організаційні, правові та психологічні аспекти в єдину систему кризового реагування. На відміну від підходів, орієнтованих на цифровізацію в мирний час, запропонована методологія відображає адаптивну модель збере-