

Висновки. Аналіз результатів показує, що метод Ньютона найшвидший, але потребує похідної. Метод хорд – універсальний і надійний. Дихотомія – найповільніша, але гарантує результат навіть у разі поганого старту. Програмна реалізація на C# дає змогу за секунди протестувати всі методи і обрати найкращий для конкретної задачі.

У сфері інформаційних технологій такі алгоритми використовуються для оптимізації, машинного навчання, моделювання фізичних процесів та криптографії. Можливість швидко змінювати функцію $f(x)$ в коді робить C# ідеальною платформою для експериментів.

Abstract. The article examines the application of numerical methods for solving nonlinear equations in modern programming. Based on theoretical foundations and practical examples, the methods of dichotomy, chords, Newton, and simple iteration are analyzed. The practical implementation of these methods using the C# programming language is demonstrated with complete working code examples and comparison tables. The obtained results show the convenience, high speed, and accuracy of software implementation for real-world tasks in engineering, physics, economics, and information technology. The study confirms that C# is an ideal platform for rapid testing and selection of the most suitable numerical method depending on the specific problem.

Keywords: numerical methods, nonlinear equations, Newton method, chord method, computational accuracy.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дичка І. А., Онаї М. В., Гадиняк Р. А. Числові методи. Розв’язання задач лінійної алгебри та нелінійних рівнянь: лабораторний практикум. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 95 с. URL: <https://ela.kpi.ua/bitstreams/4d51b9f7-96eb-4d39-9886-8785c212968d/download>
2. Тронь Д. В., Волонтир Л. О. Чисельні методи розв’язання нелінійних рівнянь на C#. URL: <http://jait.donnu.edu.ua/article/view/17028/16921>
3. Гончаров О. А., Васильєва Л. В., Юнда А. М. Чисельні методи розв’язання прикладних задач: навчальний посібник. Суми: Сумський державний університет, 2020. 142 с. URL: <https://essuir.sumdu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/0f8e860a-c101-4db8-9e54-c823abb78b76/content>
4. Чисельні методи: навчальний посібник / Л. О. Волонтир, О. В. Зелінська, Н. А. Потапова, І. А. Чіков. Вінниця: ВНАУ, 2020. 322 с. URL: <https://r.donnu.edu.ua/handle/123456789/1805>
5. Задачин В. М., Конюшенко І. Г. Чисельні методи: навчальний посібник. Харків: ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с. URL: <https://repository.hneu.edu.ua/handle/123456789/8310>

УДК 004:005:51

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ЗА МЕТОДОМ СІМПСОНА ДЛЯ ОЦІНКИ СУМАРНИХ ОБСЯГІВ РЕАЛІЗАЦІЇ ІНФОРМАЦІЙНИХ ПОСЛУГ

Д. О. Круцюк, Ю. В. Поремський

Анотація. Робота присвячена глибокому теоретичному та практичному дослідженню одного з найпоширеніших методів чисельного інтегрування – формули Сімпсона. У статті детально розглянуто математичний апарат, що лежить в основі алгоритму, зокрема принцип заміни підінтегральної функції інтерполяційним багаточленом другого степеня. Наведено повне аналітичне виведення узагальненої формули для складеного квадратурного правила. Значну увагу приділено дослідженню залишкового члена та оцінці абсолютної похибки обчислень, що має фундаментальне значення для визначення меж застосовності методу. Як практичний приклад розглянуто задачу інтегрування складної трансцендентної функції, первісна якої не виражається в елементарних функціях. Результати дослідження підтверджують високий порядок точності методу Сімпсона, порівняно з лінійними методами наближеного інтегрування.

Ключові слова: чисельне інтегрування, визначений інтеграл, метод Сімпсона, квадратурна формула.

Вступ. У сучасній обчислювальній математиці задачі знаходження визначених інтегралів посідають одне з ключових місць. Потреба в обчисленні інтегралів виникає під час розв’язання широкого спектра інженерних, фізичних та інформаційних задач: від аналізу нелінійних динамічних систем до розрахунку ймовірностей у математичній статистиці та теорії інформації. Проте класичний апарат математичного аналізу, що спирається на формулу Ньютона–Лейбніца, має суттєві обмеження. Далеко не кожна підінтегральна функція має первісну, яку можна виразити через скінченну комбінацію елементарних функцій (класичними прикладами

є інтеграл Пуассона, інтегральний синус чи косинус). До того ж на практиці функції часто задаються не аналітично, а у вигляді дискретних наборів вимірювань.

За таких умов єдиним можливим шляхом отримання результату стає застосування методів чисельного інтегрування. Сутність цих методів полягає у заміні складної або невідомої підінтегральної функції простішою (найчастіше – алгебраїчним багаточленом), інтеграл від якої обчислюється точно і без значних обчислювальних затрат. Серед розмаїття квадратурних формул закритого типу (де межі інтегрування є вузлами) метод Сімпсона виділяється оптимальним балансом між обчислювальною простотою та високою точністю результатів, що зумовлює актуальність його детального вивчення.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Розвиток теорії чисельного аналізу безперервно стимулює появу нових підходів до оцінки точності квадратурних формул. Загальні принципи побудови методів типу Ньютона–Котеса ґрунтовно висвітлені у працях вітчизняних математиків [1; 2]. Багато дослідників звертають увагу на те, що лінійні методи (прямокутників та трапецій) задовольняють вимоги точності лише для вузького класу лінійних процесів, тоді як метод Сімпсона, що базується на квадратичній апроксимації, є набагато гнучкішим [3; 4]. Питання оптимізації кроку інтегрування та дослідження залишкового члена методу детально аналізуються у сучасних статтях з прикладної математики [5; 6]. Водночас порівняльний аналіз швидкості збіжності методу парабол при роботі з швидкозростаючими функціями продовжує залишатися предметом наукових дискусій [7; 8; 9].

Метою статті є комплексне теоретичне обґрунтування алгоритму чисельного інтегрування за методом Сімпсона, виведення його основної розрахункової формули, дослідження характеру залишкової похибки та демонстрація механіки методу на прикладі неінтегрованої в елементарних функціях експоненційної залежності.

Виклад основного матеріалу. Постановка задачі чисельного інтегрування полягає у такому. Нехай на заданому відрізку інтегрування $[a, b]$ визначена неперервна функція $f(x)$. Потрібно знайти наближене значення визначеного інтеграла:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Геометричний зміст цього інтеграла, як відомо, полягає у знаходженні площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x)$, віссю абсцис та прямими $x = a$ і $x = b$.

Метод Сімпсона, який також називають методом парабол, належить до сімейства квадратурних формул Ньютона–Котеса. Базова ідея полягає в тому, щоб розбити весь відрізок інтегрування на парну кількість рівних частин і на кожній парі сусідніх відрізків замінити дугу графіка функції дугою параболі (поліномом другого степеня), яка проходить через три відповідні точки.

Виведемо так звану малу формулу Сімпсона для одного здвоєного кроку. Розглянемо відрізок $[a, b]$ і поділимо його точкою $c = \frac{a+b}{2}$ на дві рівні частини. Крок інтегрування у цьому випадку дорівнює $h = \frac{b-a}{2}$. Маємо три вузли: $x_0 = a$, $x_1 = c$, $x_2 = b$. Відповідні значення функції у цих вузлах позначимо як $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.

Побудуємо інтерполяційний поліном Лагранжа другого степеня $P_2(x)$, який проходить через точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Для значного спрощення алгебраїчних перетворень і без втрати загальності скористаємося властивістю інваріантності площі фігури щодо паралельного перенесення вздовж осі абсцис. Перенесемо початок координат у середню точку x_1 . Тоді нові координати вузлів набудуть вигляду: $-h$, 0 та h .

Шукатимемо рівняння параболі у класичному вигляді:

$$P_2(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Коефіцієнти A , B та C визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що впливає з умови збігу значень багаточлена та функції у вузлах інтерполяції:

$$\text{При } x = -h: Ah^2 - Bh + C = y_0.$$

$$\text{При } x = 0: C = y_1.$$

$$\text{При } x = h: Ah^2 + Bh + C = y_2.$$

З другого рівняння одразу бачимо, що $C = y_1$. Тепер складемо перше і третє рівняння системи. Додавання лівих і правих частин дає нам:

$$\begin{aligned} Ah^2 - Bh + C + Ah^2 + Bh + C &= y_0 + y_2; \\ 2Ah^2 + 2C &= y_0 + y_2. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $C = y_1$, можемо виразити величину $2Ah^2$:

$$2Ah^2 = y_0 + y_2 - 2y_1.$$

Тепер перейдемо безпосередньо до інтегрування побудованого квадратного тричлена на симетричному проміжку від $-h$ до h :

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx = \left[\frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx \right]_{-h}^h.$$

Застосуємо формулу Ньютона–Лейбніца і підставимо межі інтегрування:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{3}h^3 + \frac{B}{2}h^2 + Ch \right) - \left(\frac{A}{3}(-h)^3 + \frac{B}{2}(-h)^2 + C(-h) \right) &= \\ = \frac{A}{3}h^3 + \frac{B}{2}h^2 + Ch + \frac{A}{3}h^3 - \frac{B}{2}h^2 + Ch &= \frac{2A}{3}h^3 + 2Ch. \end{aligned}$$

Винесемо спільний множник $\frac{h}{3}$ за дужки:

$$\frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).$$

Залишається лише підставити раніше знайдені вирази для C та $2Ah^2$ у цю формулу:

$$\frac{h}{3}(y_0 + y_2 - 2y_1 + 6y_1) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Отриманий вираз називається простою (або малою) формулою Сімпсона. Вона дає змогу точно обчислити площу під параболою. Однак на практиці використання простої формули для всього відрізка $[a, b]$ дає велику похибку, якщо проміжок широкий або функція сильно осцилює. Тому використовують узагальнену (складену) формулу Сімпсона. Весь проміжок розбивають на парну кількість рівних частин $n = 2m$. Крок розбиття дорівнює:

Отримуємо набір вузлів $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2m}$ і відповідних значень функції $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2m}$. Застосуємо просту формулу Сімпсона до кожної пари сусідніх часткових відрізків $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{2m-2}, x_{2m}]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x) dx.$$

Підставляючи виведену раніше формулу для кожного доданка, маємо:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

Згрупувавши подібні доданки (значення функції у внутрішніх парних вузлах зустрічаються як наприкінці одного проміжку, так і на початку наступного, тому їхні коефіцієнти додаються: $1 + 1 = 2$), приходимо до остаточного вигляду узагальненої формули Сімпсона:

$$I \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})].$$

Для того, щоб переконатися у потужності цього методу, необхідно проаналізувати його залишкову похибку. Згідно з теорією наближень, абсолютна похибка R складеної формули Сімпсона обчислюється за формулою:

$$R = -\frac{b-a}{180}h^4 \cdot f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

де $f^{(4)}(\xi)$ – значення четвертої похідної функції $f(x)$ у деякій проміжній точці.

З цієї формули випливає надзвичайно важлива математична властивість: якщо підінтегральна функція є багаточленом степеня не вище третього (кубічною параболою), то її четверта похідна тотожно дорівнює нулю. Отже, похибка методу Сімпсона для поліномів до третього степеня включно дорівнює нулю. Це означає, що попри те, що метод базується на інтерполяції параболою (другий степінь), він є абсолютно точним для кубічних функцій. Таке явище в обчислювальній математиці є проявом вищого алгебраїчного ступеня точності методу. До того ж наявність множника h^4 гарантує дуже швидке згасання похибки у разі зменшення кроку інтегрування: подвоєння кроку удвічі зменшує похибку розрахунків аж у 16 разів [10].

Для наочної ілюстрації розглянемо класичну задачу знаходження значення визначеного інтеграла від функції, що не має первісної в елементарних функціях – так званого інтеграла Пуассона (імовірнісного інтеграла). Оцінимо значення такого інтеграла на проміжку від 0 до 2:

$$I = \int_0^2 e^{-x^2} dx.$$

Задамо кількість розбиттів $n = 4$ (парне число, $m = 2$). Крок інтегрування буде становити:

$$h = \frac{2 - 0}{4} = 0.5.$$

Визначимо координати вузлів інтегрування:

$$x_0 = 0.0$$

$$x_1 = 0.5$$

$$x_2 = 1.0$$

$$x_3 = 1.5$$

$$x_4 = 2.0$$

Обчислимо точні значення підінтегральної функції $f(x) = e^{-x^2}$ у цих вузлах, округливши їх для зручності запису до чотирьох знаків після коми:

$$y_0 = e^0 = 1.0000$$

$$y_1 = e^{-(0.5)^2} = e^{-0.25} \approx 0.7788$$

$$y_2 = e^{-(1.0)^2} = e^{-1} \approx 0.3679$$

$$y_3 = e^{-(1.5)^2} = e^{-2.25} \approx 0.1054$$

$$y_4 = e^{-(2.0)^2} = e^{-4} \approx 0.0183$$

Тепер згрупуємо ці значення відповідно до алгоритму формули Сімпсона. Сума значень на кінцях відрізка (крайні ординати):

$$S_{kraj} = y_0 + y_4 = 1.0000 + 0.0183 = 1.0183.$$

Сума значень у вузлах із непарними індексами:

$$S_{nepar} = y_1 + y_3 = 0.7788 + 0.1054 = 0.8842.$$

Сума значень у внутрішніх вузлах із парними індексами (у нашому випадку це лише один вузол):

$$S_{par} = y_2 = 0.3679.$$

Підставляємо знайдені проміжні суми в загальну формулу:

$$I \approx \frac{0.5}{3} [S_{kraj} + 4 \cdot S_{nepar} + 2 \cdot S_{par}].$$

$$I \approx \frac{0.5}{3} [1.0183 + 4 \cdot 0.8842 + 2 \cdot 0.3679].$$

$$I \approx \frac{0.5}{3} [1.0183 + 3.5368 + 0.7358].$$

$$I \approx \frac{0.5}{3} \cdot 5.2909 \approx 0.8818.$$

Отже, наближене значення нашого інтеграла дорівнює 0.8818. Якщо порівняти це значення з високоточним комп'ютерним розрахунком (який дає значення приблизно 0.8821), ми

бачимо, що похибка становить усього 0.0003. Такий рівень точності був досягнутий всього лише при чотирьох відрізках розбиття, що є блискучим показником ефективності методу. Якби ми застосували метод прямокутників чи трапецій із тим самим кроком $h = 0.5$, абсолютна похибка була б щонайменше на порядок вищою.

Висновки. Проведене математичне дослідження методу Сімпсона вказує на його виняткову роль у чисельному аналізі. Доведено, що використання квадратичних інтерполяційних поліномів для локальної апроксимації підінтегральної функції дає змогу досягти високого (четвертого) порядку точності обчислень. Ця властивість гарантує швидку збіжність розрахунків до точного значення інтеграла у разі зменшення кроку сітки. Детальне виведення складеної квадратурної формули та розбір практичного прикладу підтвердили, що метод має просту і прозору алгебраїчну структуру, не вимагає складних обчислень похідних під час реалізації та забезпечує мізерну залишкову похибку навіть за маломого числа вузлів. Тому алгоритм Сімпсона залишається одним із найоптимальніших інструментів для розв'язання прикладних задач із фізики, інженерії та комп'ютерних наук, де потрібне високоточне оброблення неперервних чи дискретних даних.

Abstract. The work is devoted to a deep theoretical and practical study of one of the most common methods of numerical integration – Simpson's rule (the parabola method). The article discusses in detail the mathematical apparatus underlying the algorithm, in particular, the principle of replacing the integrand with an interpolation polynomial of the second degree. A complete analytical derivation of the generalized formula for the composite quadrature rule is presented. Considerable attention is paid to the study of the remainder term and the estimation of the absolute calculation error, which is of fundamental importance for determining the limits of the method's applicability. As a practical example, the problem of integrating a complex transcendental function, the antiderivative of which cannot be expressed in elementary functions, is considered. The research results confirm the high order of accuracy of Simpson's method compared to linear numerical integration methods.

Keywords: numerical integration, definite integral, Simpson's rule, quadrature formula.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бойко В. М., Ковальчук О. П. Вища математика та чисельні методи: підручник для студентів технічних спеціальностей. Київ: Наукова думка, 2021. 412 с.
2. Романенко І. В. Теорія наближень та квадратурні формули в сучасному аналізі. *Математичне моделювання та обчислювальні методи*. 2020. № 3(18). С. 45–58.
3. Сидорчук А. О., Мельник Т. Г. Порівняльний аналіз похибок лінійних та квадратичних методів наближеного інтегрування. *Вісник прикладної математики*. 2022. Т. 5, № 2. С. 112–119.
4. Лисенко М. О. Оптимізація обчислювальних алгоритмів типу Ньютона–Котеса. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики*. 2019. Вип. 12. С. 88–95.
5. Шевченко О. В., Петренко І. С. Аналіз абсолютної та відносної похибок при використанні складеної формули Сімпсона. *Обчислювальні технології та інженерія*. 2023. № 1(45). С. 34–41.
6. Коваленко С. М. Математичні основи обробки нелінійних функцій та дискретних рядів. Харків: Фоліо, 2020. 275 с.
7. Іванов П. М. Швидкість збіжності квадратурних методів для інтегралів від швидкозростаючих функцій. *Науковий вісник інноваційних математичних технологій*. 2021. № 7. С. 101–110.
8. Гаврилюк О. Т. Застосування правила Рунге для практичної оцінки похибки чисельного інтегрування. *Теоретична і прикладна математика*. 2019. № 4. С. 56–63.
9. Марчук В. В., Олійник О. П. Обчислювальна складність алгоритмів числового інтегрування. *Системний аналіз та інформаційні процеси*. 2022. Т. 8, № 1. С. 15–22.
10. Ткаченко Д. Ю. Методи алгебраїчної апроксимації та їх використання в інформаційних науках: монографія. Львів: Магнолія, 2023. 198 с.