УДК 517.9

ТЕЛЕГРАФНІ РІВНЯННЯ ТА РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

С.Т. Акопян, К.О. Буряченко

Анотація. В роботі зроблено огляд різних підходів до визначення дробових похідних, таких як: Рімана-Ліувілля, Джрбашяна-Капуто, Рісса. Розглядаються рівняння в частинних похідних, а саме, рівняння дифузії і телеграфні рівняння, в яких виникають дробові похідні по часовим або просторовим змінним. За допомогою методу інтегрального перетворення Фур'є по просторовій змінній побудовано розв'язок цих рівнянь в явному вигляді.

Ключові слова: дробова похідна, рівняння дифузії, телеграфні рівняння.

Вступ. В статті вводиться поняття дробової похідної з використанням декількох підходів. Розглядаються властивості дробового диференціювання, які відрізняються від звичного нам звичайного диференціювання. В роботі висвітлюються основні підходи до визначення дробових похідних: Рімана-Ліувілля, Джрбашяна-Капуто та Рісса.

В літературі досить докладно досліджено рівняння дифузії та телеграфне рівняння із звичайними похідними натурального порядку. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є F можна побудувати явний розв'язок цих рівнянь, використовуючи наступну властивість: $F\left(d^{\alpha}u\right)(\xi)=(i\xi)^{\alpha}F(u)(\xi)$. В роботі продемонстровано, що у випадку, коли α - дробове число, цей метод також спрацьовує і можна отримати явних вигляд розв'язків рівнянь дифузії та телеграфного рівняння з дробовими похідними по просторовій змінній .

Інтеграл Рімана-Ліувілля

Нагадаємо наступну формулу Коші:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-x_n)^{n-1} f(x_n)dx_n ,$$

доведення якої відбувається за допомогою метода математичної індукції. Зауважимо, що $(n-1)!=\Gamma(n), \forall n \in N$.

Інтеграли

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,\ x>a, \quad (1)$$

$$(I_{b+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt,\ x<b, \quad (2)$$

де $\alpha>0$, називають інтегралами дробового порядку α . Інтеграли (1), (2) прийнято називати також дробовими інтегралами Рімана-Ліувілля, лівостороннім та правостороннім відповідно.

Для інтегралів (1), (2) справджуються наступні властивості:

1) $I^{\alpha}(f+g)=I^{\alpha}f+I^{\alpha}g$,

2) $I^{\alpha}(Cf)=CI^{\alpha}f$,

3) $I^{\alpha}I^{\beta}f=I^{\beta}I^{\alpha}f=I^{\alpha+\beta}f$.

Доведемо, наприклад, третю властивість. Маємо:

$$(I^{\alpha}I^{\beta}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}(I^{\beta}f)(t)dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-z)^{\beta-1}f(z)dz\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(z)dz\int_z^x(x-t)^{\alpha-1}(t-z)^{\beta-1}dt=\left[t-z=y\right]=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(z)dz\int_0^{x-z}(x-z-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dy=$$

$$=\left[y=(x-z)w\right]=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(z)(x-z)^{\alpha+\beta-1}dz\int_0^1 w^{\beta-1}(1-w)^{\alpha-1}dw=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^x f(z)(x-z)^{\alpha+\beta-1}dz=(I^{\alpha+\beta}f)(x).$$

Дробова похідна Рімана-Ліувілля

Що стосується дробового диференціювання, то його природно ввести, як операцію, обернену дробовому інтегруванню. Для функції $\varphi(x)$, заданої на відрізку $[a;b]$, вирази

$$(D_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \qquad (3)$$

$$(D_{b-}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b\frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \qquad (4)$$

називатимемо дробовою похідною порядку $\alpha,\ 0<\alpha<1$, лівосторонньою та правосторонньою відповідно. Дробові похідні (3), (4) називають похідними Рімана-Ліувілля. Розглянемо основні властивості дробової похідної. Формула зв'язку між похідною і інтегралом Рімана має вигляд:

$$D^{\alpha}\varphi=\frac{d}{dx}(I^{1-\alpha})\Rightarrow(D_{a+}^{\alpha}\varphi)=\frac{d}{dx}I_{a+}^{1-\alpha},(D_{b-}^{\alpha}\varphi)=\frac{d}{dx}I_{b-}^{1-\alpha}.$$

Тому, властивості похідної дробового порядку, є властивостями похідної першого порядку і інтеграла Рімана.

1) $D^{\alpha}(f-g)=D^{\alpha}f-D^{\alpha}g$,
2) $D^{\alpha}Cf=CD^{\alpha}f$,
3) $D^{\alpha}(D^{\beta}f)\neq D^{\beta}D^{\alpha}f$,
4) $D^{\alpha}(D^{\beta}f)\neq D^{\alpha+\beta}f$.

Доведемо властивості 3) та 4). Для цього запишемо дробову похідну від конкретної функції. Наприклад $f(x)=x^{\upsilon}$.

Тоді, $D^{\alpha}x^{\upsilon}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)}x^{\upsilon-\alpha}$. Візьмемо $\nu=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$ та отримаємо:

$$D^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)}x^0=\Gamma(3/2)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\ D^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(0)}x^{-1}=0,$$

$$D^{\frac{3}{2}}\left(D^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1)}{\Gamma(-1/2)}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{\pi}x^{-\frac{3}{2}}}{2\Gamma(-1/2)}\neq D^{\frac{1}{2}}\left(D^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)=0,$$

$$D^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}=D^2x^{\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(-1/2)}x^{-\frac{3}{2}}=-\pi x^{-\frac{3}{2}}\neq D^{\frac{1}{2}}\left(D^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)=0.$$

Дробова похідна Джрбашяна-Капуто

Визначимо дробову похідну Джрбашяна-Капуто:

$$D^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x \frac{\frac{d}{dx} f(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1-m}}, \text{ де } m-1<\alpha<m,\ \alpha>0.$$

В символах ми також матимемо: $D^{\alpha} f = I^{m-\alpha} D^m f$, де $I^{m-\alpha}$ і D^m добре відомі нам класичні інтеграл Рімана-Ліувілля та дробова похідна Рімана-Ліувілля.

Нагадаємо визначення перетворення Лапласа від похідної порядку n:

$$L\left\{f^n(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-rt} f^{(n)}(t)dt = r^n \int_0^{\infty} e^{-rt} f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} r^k \left.\frac{d^{n-1-k}}{dx^{n-1-k}} f(t)\right|_{t=0}.$$

Покажемо, що для дробової похідної Рімана-Ліувілля має місце аналогічна формула:

$$\int_0^{\infty} e^{-rt} (D^{\alpha} f)(t)dt = r^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-rt} f(t)dt - \sum_{k=0}^{m-1} r^k \left. D^{\alpha-1-k} f(t)\right|_{t=0},\ m-1<\alpha<m.$$

Основною різницею між підходом Рімана-Ліувілля та Джрбашяна-Капуто є те, що похідна Джрбашяна-Капуто вводиться через звичайну похідну порядку m, а похідна Рімана-Ліувілля визначається через звичайну похідну першого порядку.

Дробова похідна Рісса

Розглянемо потенціал Рісса $\left(I^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x-t|^{\alpha-1} f(t)dt$, за допомогою якого, визначимо дробову похідну Рісса:

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial |x|^{\alpha}} f(x) = -\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{\frac{d^m}{dx^m}}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)dt}{|x-t|^{\alpha-m+1}} = -\frac{1}{2\Gamma(m-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \left[\frac{d^m}{dx^m} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-m+1}} + \right.$$

$$\left. + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} \int_x^{\infty} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-m+1}} \right].$$

З використанням дробового інтеграла, отримаємо співвідношення: $D_R^{\alpha} f = D^m I_R^{m-\alpha} f$, де $m-1<\alpha<m$.

Метод інтегрального перетворення Фур'є по просторовій змінній. Розв'язання рівняння дифузії.

Знайдемо розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{5}$$

$$\left. u \right|_{t=0} = \varphi(x), \tag{6}$$

методом інтегрального перетворення Фур'є:

$$\hat{u}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x) e^{-ix\xi} dx;\ u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(t,\xi) e^{ix\xi} d\xi;\ F(u^{(k)})(t,\xi) = (i\xi)^k F(u)(t,\xi)$$

В рівнянні (5) та умові (6) зафіксуємо t, та застосуємо перетворення Фур'є F по просторовій змінній:

$$\hat{u}_t(t,\xi) = a^2 (i\xi)^2 \hat{u}(\xi), \tag{7}$$

$$\left. \hat{u} \right|_{t=0} = \hat{\varphi}(\xi). \tag{8}$$

Отже, (7), (8)-задача Коші для рівняння першого порядку з параметром ξ.

Розв'яжемо її:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = -a^2\xi^2\hat{u} \Rightarrow \frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = -a^2\xi^2 dt \Rightarrow \ln|\hat{u}| = -a^2\xi^2 t + C \Rightarrow \hat{u} = Ce^{-a^2\xi^2 t}.$$

Розв'язок задачі (7), (8) має вигляд $\hat{u} = \hat{\varphi}(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}$. Тепер знайдемо $u(t,x)$ за допомогою оберненого перетворення Фур'є:

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\xi)e^{-a^2\xi^2 t}e^{ix\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\xi^2 t+i\xi(x-y}d\xi\right\}dy..$$

Розглянемо властивості перетворення Фур'є, у випадку дробової похідної $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$, де $\alpha \in (0;1)$.

Маємо:

$$F(d^\alpha u)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}d^\alpha u(y)e^{-iy\xi}dy = (i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi).$$

Розглянемо тепер початкову задачу з функцією Дірака $\delta(x)$ в якості початкової функції для рівняння дифузії з дробовою похідною Ріска по просторовій змінній:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^\upsilon u}{\partial|x|^\upsilon}, \tag{9}$$

$$u(0,x) = \delta(x). \tag{10}$$

Задача (9), (10) розв'язується за допомогою перетворення Фур'є. Аналогічно тому, як це було зроблено вище для рівняння теплопровідності (5), (6).

Телеграфні рівняння з дробовою похідною Рісса

Розглянемо телеграфне рівняння з дробовою за часовою змінною похідною:

$$\frac{\partial^{2\alpha}u}{\partial t^{2\alpha}} + 2\lambda\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{11}$$

де $0 < \alpha < 1$, та задачі з дробовою похідною за просторовою змінною:

$$\frac{\partial^{2\alpha}u}{\partial t^{2\alpha}} + 2\lambda\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = c^2\frac{\partial^\upsilon u}{\partial|x|^\upsilon}, \tag{12}$$

де $t > 0; x \in R; c > 0; \nu \in (0;2), \nu \neq 1; \alpha \in (0;2)$.

$$u(0,x) = \delta(x),\ 0 < \mu \leq 1, \tag{13}$$

$$u_t(0,x) = 0,\ 1 < \mu \leq 2. \tag{14}$$

У випадку, коли $\alpha = 1$, розв'яжемо задачу Коші (12)-(14) методом інтегрального перетворення Фур'є за просторовою змінною:

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2} + 2\lambda\frac{\partial\hat{u}}{\partial t} = -c^2|\xi|^\upsilon\hat{u},\ \text{де}\ 0 < \nu < 2, \nu \neq 1, \tag{15}$$

$$\hat{u}(0,\xi) = 1, \tag{16}$$

$$\hat{u}_t(0,\xi) = 0. \tag{17}$$

Маємо: $d^2\hat{u} + 2\lambda d\hat{u} + c^2|\xi|^\upsilon\hat{u} = 0.$ Використовуючи метод Ейлера, $\hat{u}(t,\xi) = e^{\mu t}$, приходимо до алгебраїчного рівняння стосовно $\mu : \mu^2 + 2\lambda\mu + c^2\ |\ \xi\ |^\nu = 0,$

$$D = \lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon \Rightarrow \mu_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon},$$

$$\hat{u}\ (t,\xi) = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t} = C_1 e^{-\lambda t}e^{t\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}} + C_2 e^{-\lambda t}e^{-t\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}}.$$

Знайдемо C_1 і C_2 з умов (16), (17):

$$\hat{u}(0,\xi) = C_1 + C_2 = 1,\ \hat{u}_t(0,\xi) = -\lambda - 2\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}\,C_2 + \sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon} = 0,$$

звідки, $C_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}}, C_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}}$.

Тоді розв'язок задачі (15)-(17) набуде вигляду:

$$\hat{u}(t,\xi) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}}\right)e^{-\lambda t}e^{t\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}}\right)e^{-\lambda t}e^{-t\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}}{2}\left[\left(1 + \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}}\right)e^{t\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}} + \left(1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}}\right)e^{-t\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}}\right].$$

Використовуючи обернене перетворення Фур'є, приходимо до розв'язку задачі (12)-(14):

$$u(t,x) = \frac{e^{-\lambda t}}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(1 + \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}}\right)e^{t\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}} + \left(1 - \frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}}\right)e^{-t\sqrt{\lambda^2 - c^2|\xi|^\upsilon}}\right]e^{ix\xi}d\xi\ .$$

Висновки.

В роботі розглянуто різні підходи до визначення дробової похідної. Розглянуто властивості дробового диференціювання, які відрізняються від звичайного диференціювання. Розглянуто основні підходи Рімана-Ліувілля, Джрбашяна-Капуто та Рісса. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є побудовано явний розв'язок початкових задач для рівнянь дифузії та телеграфного рівняння з дробовими похідними.

Робота виконана за підтримки грантів Міністерства освіти та науки України (номера держреєстрації: 0115U000136 та 0116U004691).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Rudolf Hilfer, Yury Luchko, Zivorad Tomovski Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives. In: Fract. Calc. Appl. Anal. -2009. -№ 12. -P. 299-318.
2. Francesco Mainardi, Yuri Luchko, Gianni Pagnini The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation. In: arXiv preprint cond-mat/0702419. - 2007/2/18. – P. 46.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. -Минск.: Наука и техника, 1987. - 688 с.

УДК 004.1082

СПОСОБЫ УСТРАНЕНИЯ БАРЬЕРОВ ПРИ ВНЕДРЕНИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ НА ПРЕДПРИЯТИЯХ

Е.Н. Артеменкова, О.Н. Анисимова

Аннотация. Информационные технологии в сфере бизнеса позволяют не только управлять всеми видами ресурсов предприятия, но и способствуют эффективному осуществлению коммерческой деятельности, направленной на повышение конкурентоспособности самого предприятия. В данной стаье применение ИТ в управленческой деятельности рассматривается как один из видов организационных изменений.