Новосибирск :Сибирская академия государственной службы, 2008. - 111 с.
4. Петров Ю.А. Комплексна автоматизація управління підприємством / Ю. А. Петров. – М.: Справа, 2006. – 123 с.
5. Матвієнко О.В. Інформаційний менеджмент опорний конспект опорний конспект лекцій у схемах та таблицях: підруч [для студ. вищ. навч. закл.] / О.В. Матвієнко. – Л.: Відродження 2009. – 96 с.

УДК 517.5

ТЕОРЕМА ПРО СЕРЕДНЄ ДЛЯ ФУНКЦІЇ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

А.В. Ноздрановська, О.Д .Трофименко

Анотація. В роботі досліджено розв'язки інтегральних рівнянь із середнім значенням. Вивчено класи функцій на підмножинах комплексної площини, що задовольняють умовам спеціального виду.
Ключові слова: теорема про середнє, експоненціальна функція, функція Бесселя, інтегральне рівняння.

Відомо, що значення похідної функції в деякій області дозволяє зробити висновок про характерні особливості в поведінці цієї функції. В основі всіх таких досліджень знаходяться так звані теореми про середнє. Наприклад, є широко відомими такі результати, як теорема Ролля, теорема Лагранжа та їх узагальнення - теорема Коші про середнє.

Використовуючи формулу Гріна та інтеграл Пуассона, стає можливим сформулювати теорему Гаусса, яка характеризує клас гармонічних функцій за допомогою формули середнього значення.

Теорема 1.

Значення гармонічної функції у центрі круга дорівнює середньому арифметичному її значень на колі. Тобто для функції $P(z)$, голоморфної в крузі з радіусом R та центром в точці $z=0$, виконується

$$P(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(Re^{i\theta})d\theta .$$

Нехай функція $f\in C(D)$ ($D:|z|<1$), f називається ареоларно моногенною в D тоді і тільки тоді, коли $\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\right) f$ - аналітична функція в D.

Наступний результат є теоремою про середнє для ареоларно моногенної функції (М. О. Рід, 1951 р.).

Теорема 2.

Якщо $f(z)\in C(D)$, $D:|z|<1$, тоді наступні твердження еквівалентні

(I) $f(z)$ - ареоларно моногенна в D.

(II) Рівняння

$$\int_{C(z,r)}(\varsigma-z)f(\varsigma)d\varsigma=0$$

виконується для кожного $C(z,r)$ в D ($C(z,r)-$ границя замкненого диску $D(z,r)$ з центром в точці z і радіусом r).

(III) Рівняння

$$\iint_{D(z,r)}(\varsigma-z)^2\, f(\varsigma)d\xi d\eta=0$$

виконується для кожного $D(z,r)$ в D.

Продовжуючи міркування, наведемо аналог цієї теореми для m-аналітичної функції ($m\in N$).

Нехай Ω – область на комплексній площині, $m \in N$. Функція f, локально інтегрована в Ω, називається m-аналітичною в Ω тоді і тільки тоді, коли $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^m f = 0$ у сенсі розподілів.

Теорема 3. (див.[1])

Якщо функція $f - m$-аналітична у Ω $(\Omega \subset C, m \in N)$, то рівняння:

$$\int_{|z|=r} f(z+\varsigma) z^{m-1} dz = 0,$$

виконано для майже всіх $\varsigma \in \Omega, r \in (0, dist(\varsigma, \partial\Omega))$.

Зворотнє твердження також є вірним.

Основні результати

Продовженням попередніх результатів є розгляд випадку аналогічних рівнянь із середнім значенням із різною вагою (див.[2]–[4]). У згаданих роботах О.Д. Трофименко розглядається функція спеціального експоненціального виду.

На шляху цього дослідження постає питання застосування похідної функції, як розв'язку наступного рівняння

$$\sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{2(n-s)!(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{|\varsigma - z| \le r} f(\varsigma)(\varsigma - z)^s d\xi d\eta, \tag{1}$$

де $m \in N$ та $s \in \{0, ..., m-1\}$ фіксовані. Також r - фіксоване або належить множині з двох елементів.

Для формулювання основного результату зробимо деякі позначення.

Нехай J_s - функція Бесселя першого роду з індексом s $(s \in Z)$, а саме

$$J_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(z/2\right)^{s+2k}}{k!(s+k)!}.$$

Також позначимо

$$g_r(z) = \frac{J_{s+1}(rz)}{(zr)^{s+1}} - \sum_{n=s}^{m-1} \frac{(zr)^{2(n-s)}(-1)^{n-s}}{(n+1)!(n-s)!2^{2n-s+1}},$$

де $m \in N$ та $s \in \{0, ..., m-1\}$.

Нехай n_λ - кратність нулів λ наведеної функції $g_r(z)$.

Наступний результат представляє собою аналог теореми про середнє для спеціально визначеної функції.

Теорема 4.

Нехай $\lambda \in C$, $f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} e^{i\lambda(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}$, де $\eta \in \{0, ..., n_\lambda - 1\}, \alpha \in R^1, r > 0$. Тоді для $z \in C$ маємо

$$\begin{aligned} &\iint_{|\varsigma - z| \le r} f(\varsigma)(\varsigma - z)^s d\xi d\eta - \sum_{n=s}^{m-1} \frac{2\pi r^{2n+2}}{2(n-s)!(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} f(z) = \\ &= 2\pi g_r(\lambda) e^{i\alpha s} i^{s+2} \frac{r^{s+1}}{\lambda} f(z). \end{aligned} \tag{2}$$

Доведення.

Почнемо з лівої частини рівняння (2).

Підставимо функцію $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} e^{i\lambda(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}$ до правої сторони рівняння (1).

Спочатку маємо

$$\iint\limits_{|\omega|\le r} f(\omega+z)\omega^s dudv = \iint\limits_{|\omega|\le r} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} e^{i\lambda((x+u)\cos\alpha+(y+v)\sin\alpha}\omega^s dudv =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} e^{i\lambda(x\cos\alpha+y\sin\alpha)} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{r} (\rho e^{i\varphi})^s e^{i\lambda\rho\cos(\varphi-\alpha)} \rho d\varphi d\rho .$$

Зробимо заміну $t=\varphi-\alpha$.

Тоді

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} e^{i\lambda(x\cos\alpha+y\sin\alpha)} e^{i\alpha s} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{r} \rho^{s+1} e^{its} e^{i\lambda\rho\cos t} dtd\rho =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} e^{i\lambda(x\cos\alpha+y\sin\alpha)} e^{i\alpha s} \int_{0}^{r} \rho^{s+1}(-1) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(t+\frac{\pi}{2})s} e^{i\frac{\pi}{2}s} e^{i\lambda\rho\sin(\frac{\pi}{2}+t)} d(\frac{\pi}{2}+t) d\rho.$$

Продовжуючи міркування, отримуємо

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} e^{i\lambda(x\cos\alpha+y\sin\alpha)} e^{i\alpha s} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{r} \rho^{s+1} e^{its} e^{i\lambda\rho\cos t} dtd\rho =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} e^{i\lambda(x\cos\alpha+y\sin\alpha)} e^{i\alpha s} i^s 2\pi(-1) \int_{0}^{r} \rho^{s+1} J_s(\lambda\rho) d\rho.$$

Використовуючи властивості функції Бесселя $J_s(z)$, маємо

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} e^{i\lambda(x\cos\alpha+y\sin\alpha)} e^{i\alpha s} i^s (-2\pi) \frac{1}{\lambda^{s+2}} \int_{0}^{r} (\lambda\rho)^{s+1} J_s(\lambda\rho) d(\lambda\rho) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} e^{i\lambda(x\cos\alpha+y\sin\alpha)} e^{i\alpha s} i^s \frac{(-2\pi)}{\lambda} r^{s+1} J_{s+1}(\lambda).$$

Далі підставимо вихідну функцію $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} e^{i\lambda(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}$ до лівої частині зазначеного рівняння (1).

$$2\pi \sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(n-s)!(2n+1)!n!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-s} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} (e^{i\lambda(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}) =$$

$$= 2\pi \sum_{n=s}^{m-1} \frac{r^{2n+2}}{(n-s)!(2n+1)!n!} \frac{i^{2n-s}}{2^{2n-s}} \lambda^{2n-s} e^{i\alpha s} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} (e^{i\lambda(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}).$$

Легко бачити, що різниця лівої та правої частини має наступний вигляд

$$2\pi g_r(\lambda) e^{i\alpha s} i^{s+2} \frac{r^{s+1}}{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\eta} e^{i\lambda(x\cos\alpha+y\sin\alpha)}.$$

Висновки.

Отже, в роботі досліджено питання розв'язку рівняння (2). Це дозволяє отримати критерій для вихідного рівняння (1). Таким чином, з'являється можливість знайти розв'язки рівняння із середнім значенням, що посилює всі попередні результати.

Цікаво, що розв’язками таких рівнянь постають поліаналітичні функції спеціального виду. При певних умовах ними можуть бути і полігармонічні функції. Вивчення поліаналітичних функцій може вплинути на розв’язок деяких задач теорії пружності, а також теорії функцій багатьох комплексних змінних.

Отриманий результат можна застосовувати до вивчення аналітичних, гармонічних функцій, а також у теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Аннотация. В работе исследованы решения интегральных уравнений со средним значением. Изучены классы функций на подмножествах комплексной плоскости, которые удовлетворяют условиям специального вида.
Ключевые слова: теорема о среднем, экспоненциальная функция, функция Бесселя, интегральное уравнение.

Abstract. The solutions of the integral equations with mean value are investigated in this paper. The classes of functions on subsets of the compact plane that satisfy the conditions of the special type are studied.
Keywords: mean value theorem, exponential function, Bessel function, integral equation.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. V.V. Volchkov. Integral geometry and convolution equation, Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
2. О. Д. Трофименко. Теорема єдиності для розв'язків деяких рівнянь середніх значень . Донецк: Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 24. – С. 243– 242.
3. О. Д. Трофименко. Узагальнення теореми про середнє для поліаналітичних функцій у випадках кола та круга. Вісник ДонНУ. – 2009. Сер. А: Природничі науки, Т. 1. – С. 28– 31.
4. O. D. Trofymenko. Two-radii theorem for solutions of some mean value equations, Mat. Stud. 40. – 2013. – С.137– 143.
5. A. G. Ramm The Pompeiu problem. Global J. of Math. Analysis. – 2013. – V. 1. – P. 1– 10.