УДК 517.44

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ВАТСОНА В ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕННЯХ

Д. В. Кірка

Анотація. В роботі досліджено теорему Ватсона із формулою обернення. Проаналізовано методи інтегрування та умови унітарності оператору основної теореми. Побудовано синус-перетворення та косинус-перетворення за умов теореми Ватсона.

Ключові слова: теорема Ватсона, перетворення Фур'є, синус-перетворення, косинус-перетворення.

Вступ**.** Інтегральні перетворення успішно використовуються протягом майже двох століть у вирішенні багатьох завдань з прикладної математики, математичної фізики та інших інженерних наук (див. [1]–[4]). Історичне походження інтегральних перетворень, в тому числі перетворення Лапласа і Фур'є, можна простежити до знаменитої роботи П. С. Лапласа (1749–1827) з теорії ймовірностей у 1780-х роках і до монументального трактату Джозефа Фур'є (1768–1830) на тему La Th´eorie Analytique de La Chaleur, що опубліковано в 1822 році. Насправді, класична книга Лапласа про La Th'eorie Analytique de La Chaleur включала деякі основні результати перетворення Лапласа, які були одними з найстаріших і найбільш часто використовуваних інтегральних перетворень, доступних в математичній літературі (див. [5]). Це ефективно використовувалося для пошуку розв'язків лінійних диференціальних рівнянь та інтегральних рівнянь.

Якщо функція $f(x)$ є кусково гладкою на будь-якому скінченому відрізку вісі Ox та абсолютно інтегрована на всій вісі, то функція

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\varepsilon t}\, dx \tag{1}$$

називається перетворенням Фур'є функції $f(x)$.

Жан Батист Жозеф Фур'є – (1768 – 16 травня 1830) — французький математик і фізик, відомий тим, що започаткував використання рядів Фур'є для розв'язування задач математичної фізики.

Ряди та перетворення Фур'є активно застосовується у різних напрямах природничих наук. Наприклад, у хімії використовується ІЧ Фур'є спектрометр для виконання наукових досліджень із аналізу невідомих речовин та ідентифікації структурних фрагментів за спектрами поглинання. Взагалі кажучи, в обчислювальній техніці ряди і перетворення Фур'є відіграють ключову роль для обробки та відтворювання сигналів.

Для формування косинус-перетворення та синус-перетворення Фур'є зазвичай використовують подвійний інтеграл та формули для коефіцієнтів Фур'є.

У представленій роботі розглядається класична теорема Ватсона для інтегрального представлення Фур'є і її застосування для побудови косинус-перетворення та синус-перетворення Фур'є.

Теорема Ватсона.

Нехай $\omega(x)$ – дійснозначна функція при $x \geq 0$, що задовольняє наступним умовам: $\forall\, \alpha, \beta \geq 0$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\omega(\alpha x) \cdot \omega(\beta x)}{x^{2\vartheta+3}} = \frac{1}{2(\vartheta+1)} \cdot \min\{\alpha^{2\vartheta+2}, \beta^{2\vartheta+2}\}, \tag{2}$$

де $\vartheta > -1$.

Тоді $\forall\, f \epsilon L^2(0, +\infty)$ функція

$$h(x) = \frac{1}{x^{\vartheta+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \frac{\omega(xt)}{x^{\vartheta+\frac{3}{2}}} \cdot f(t)dt \tag{3}$$

визначена майже для всіх $x\epsilon(0,+\infty)$, належить простору $L^2(0,+\infty)$ та виконуються співвідношення

$$f(x) = \frac{1}{x^{\vartheta+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \frac{\omega(xt)}{t^{\vartheta+\frac{3}{2}}} \cdot h(t)dt \tag{4}$$

і

$$\int_0^{+\infty} |h(x)|^2 dx = \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx \tag{5}$$

Розглянемо функцію

$$\omega(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sin(x), \vartheta = -\frac{1}{2} \tag{6}$$

Для цього спочатку розв’яжемо

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - cos(\delta x)}{x^2} dx, \tag{7}$$

де $\delta -$ деяка константа.

Маємо

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - cos(\delta x)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2sin^2\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{x^2} dx$$

після заміни $t = \frac{\delta x}{2}$ отримаємо

$$2\int_0^{+\infty} \frac{sin^2 t}{\left(\frac{2t}{\delta}\right)^2} \frac{2dt}{\delta} dt.$$

Тоді матимемо

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin^2(t)}{t^2} \delta\, dt = -\delta \int_0^{+\infty} sin^2(t)\, d\left(\frac{1}{t}\right) =$$

$$= \delta\left(\frac{-sin^2(t)}{t}\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot sin(2t)\, dt = \delta \int_0^{+\infty} \frac{sin(2t)}{t} dt.$$

Знову зробимо заміну $u = 2t$ і отримаємо

$$\frac{\delta}{2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{2}} du}$$

Використовуючи значення відомого невласного інтегралу, маємо

$$\delta\int_{0}^{+\infty}\frac{sin(u)}{u}du=\delta\frac{\pi}{2}$$

Перевіримо виконання умови теореми Ватсона

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}sin(\alpha x)\cdot sin(\beta x)}{x^2}dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(\alpha-\beta)\,x-\cos(\alpha+\beta)x}{x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{cos(\alpha-\beta)x-1+1-cos(\alpha+\beta)x}{x^2}dx=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{|\alpha-\beta|}{2}\right)=$$

$$=\begin{Bmatrix}\text{якщо } \alpha\geq\beta, \text{то } \beta\\ \text{якщо } \alpha<\beta, \text{то } \alpha\end{Bmatrix}=\min\{\alpha,\beta\}, \tag{8}$$

де $\alpha,\beta\geq 0$.

Отже, функція $\omega(x)$ задовольняє умові теореми Ватсона (2).

Позначимо

$$F_c g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\int_{0}^{+\infty}\frac{sin(xt)}{t}g(t)dt \tag{9}$$

таким чином, маємо косинус-перетворення Фур'є функції g.

Нехай $g\epsilon L(0,+\infty)$, тоді

$$F_c g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}g(t)\,cos(xt)\,dt. \tag{10}$$

Тепер розглянемо функцію, що є аналогом функції (6)

$$\omega(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-\cos(x)),\qquad \vartheta=-\frac{1}{2} \tag{11}$$

Аналогічно маємо інтегральні перетворення

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{(1-cos(\alpha x))(1-cos(\beta x))}{x^2}dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos(\beta x)-\cos(\alpha x)+\cos(\alpha x)cos\,(\beta x)}{x^2}dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{+\infty}\frac{1-cos(\beta x)}{x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1-cos(\alpha x)}{x^2}dx-\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{cos(\alpha x)\,cos(\beta x)}{x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{cos\,(\alpha x)\;\;cos(\beta x)-1}{x^2}dx\right).$$

Виконавши перетворення маємо, що

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{(1-cos(\alpha x))(1-cos(\beta x))}{x^2}dt =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\int_{0}^{+\infty}\frac{2-cos(\alpha+\beta)\,x+cos(\alpha-\beta)x}{x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{|\alpha-\beta|}{2}\right)=\frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}=\min\{\alpha,\beta\} \qquad (12)$$

Знову маємо унітарний оператор

$$F_s g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\int_{0}^{+\infty}\frac{1-cos(xt)}{t}g(t)dt, \qquad (13)$$

а саме – синус-перетворення Фур'є.

І при умові $g\epsilon L(0,+\infty)$

$$F_s g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty} g(t)\,sin(xt)\,dt. \qquad (14)$$

Нарешті, розглянемо узагальнений випадок для $g\epsilon L_2(-\infty,+\infty)$. Для цього попередньо позначимо функцію

$$h=Fg(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixt}-1}{-it}g(t)dt. \qquad (15)$$

Тоді постає питання стосовно виконання рівності

$$g=F^{-1}g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixt}-1}{it}h(t)dt$$

Нехай маємо представлення функції у вигляді суми

$g=g_1+g_{2,}$ де $g_1=\dfrac{g(t)+d(-t)}{2}$ – парні і $g_2=\dfrac{d(t)-d(-t)}{2}$ – непарні.

Далі відповідно

$$g(t)=\frac{g(t)+d(-t)}{2}+\frac{d(t)-d(-t)}{2}.$$

Тепер маємо

$$h=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(xt)-i\,sin(xt)}{-it}\cdot(g_1+g_2)dt=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{0}^{+\infty}\frac{cos(xt)-1}{-it}\cdot g_2(t)+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{0}^{+\infty}\frac{sin(xt)}{t}\cdot g_1(t)dt=F_c g_1+\frac{1}{i}F_s g_2$$

Отримали

$h=F_c g_1-iF_s g_2$

Позначимо тепер

$h_1=F_c g_1,\; h_2=F_s g_2$, тоді $h=h_1-ih_2,$ де в свою чергу $g_1=F_c h_1,\;\; g_2=F_s h_2$ за властивостями оберненості косинус-перетворення та синус-перетворення Фур'є.

Тепер необхідно показати, що

$$g=F_c h_1+F_s h_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{ixt}-1}{it}\right)h(t)dt \qquad (16)$$

Тому маємо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{ixt}-1}{it}\right)h(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{cos(xt)-1}{it}+\frac{sin(xt)}{t}\right)(h_1-ih_2)dt=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{0}^{+\infty}\frac{cos(xt)-1}{it}\cdot(-ih_2)dt+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{sin(xt)}{t}\right)\cdot h_1dt=F_sh_2+F_ch_1$$

Враховуючи унітарність оператору F в $L_2(-\infty,+\infty)$, маємо доведення поставлених припущень стосовно функцій g та h.

Висновки. Таким чином, в роботі розглянуто застосування інтегральних перетворень, досліджено різні підходи до визначення понять косинус-перетворення та синус-перетворення Фур'є. Завдяки теоремі Ватсона та деяким властивостям невласних інтегралів і операторів, побудовано інтегральну формулу перетворення Фур'є.

Анотация. В работе исследована теорема Ватсона с формулой обращения. Проведен анализ методов интегрирования и условий унитарности оператора основной теоремы. Построены синус-преобразование и косинус-преобразование при условиях теоремы Ватсона.

Ключевые слова: теорема Ватсона, преобразование Фурье, синус-преобразование, косинус-преобразование.

Abstract. The Watson's theorem with the inverse transform is investigated in this paper. The methods of integration and the conditions for operator's unitary from the main theorem are analyzed. The Fourier sine and cosine transforms with conditions of Watson's theorem are constracted.

Key words: Watson's theorem, Fourier transform, sine and cosine transforms.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И. Избранные задачи интегральной геометрии. КДУ Добросвет, 2012. 236 с.
2. Ахиезер Н. И. Лекции об интегральных преобразованиях. Харьков, 1984. 120 с.
3. Н. О. Вірченко Про нові узагальнені інтегральні перетворення. *Доповіді Національної академії наук України.* 2010. № 5. С. 11–17.
4. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht / Boston / London : Kluwer Academic Publishers, 2003. 454 c.
5. Lokenath Debnath, Dambaru Bhatta Integral transforms and their applications. Third edition, University of Texas-Pan American Edinburg, USA. 2015. 759 c.

УДК 502.11:502.15(477.44)

СУЧАСНИЙ СТАН БІОРІЗНОМАНІТТЯ СХІДНОГО ПОДІЛЛЯ

Д. О. Кулібаба, Ю. Ю. Овчинникова

Анотація. У даному дослідженні подана інформація про сучасний стан біорізноманіття Східного Поділля. Східне Поділля, природний комплекс якого займає 4,5 % території держави, що розташований в межах найбільш окультуреного регіону – Правобережного Лісостепу України, проблеми збереження й відтворення біотичного і ландшафтного різноманіття, стабілізації екологічної рівноваги, підвищення продуктивності екосистем, забезпечення збалансованого розвитку суспільства є надзвичайно актуальними і важливими. Вирішення проблеми охорони, збереження і відтворення біорізноманіття, оптимізація існуючих структурних елементів і створення нових заповідних об'єктів шляхом реалізації екологічної мережі є важливим завданням, необхідним для ефективного коригування стратегії збалансованого розвитку регіону.

Ключові слова: біорізноманіття, екологічний коридор, регіональна екологічна мережа, Східне Поділля.

Унікальність Східного Поділля – це поєднання своєрідних ландшафтів, кліматичних умов, ґрунтового покриву, геологічної будови, гідрографії, що відбилося на біорізноманітті. Тут фрагментарно збереглася лісова, степова, чагарникова, лучна, наскельно-степова і водно-болотна рослинність, що сформувалася в мозаїчних екотопах. В межах регіону