культивування на середовищі з фільтрувальним папером щодо сирінгалдазину, проте у штаму Vs-2 *P. pomaceus* за культивування на середовищі з лігносульфонатом данний показник більший. Отже, такий субстрат, як сирінгалдазин, є найбільш специфічним для штаму Vs-2 *P. pomaceus*. Штами S.hirs *S. hirsutum,* T.bif *T. biforme,* M.gig *M. giganteus* продукують ферменти, для яких є найбільш специфічним субстратом гваякол за культивуванні на середовищі з лігносульфонатом; при культивуванні на середовищі з фільтрувальним папером лакказна активність по відношенню до гваяколу була меншою. По відношенню до пірокатехину найвищі показники лакказної активності зафіксовано при культивуванні на середовищі з фільтрувальним папером у штамів S-5 *T. versicolor* та R-4 *P. pomaceus,* а за культивування на середовищі з лігносульфонатом по відношенню до пірокатехину показники лакказної активності менші. Штам M.gig *M. giganteus* проявляє високу активність по відношенню до різних субстратів: пірокатехин, гваякол, сирінгалдазин, тобто, може бути використаний для біодеградації лігнінвмісних субстратів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Varnaite R., Raudoniene V. Enzymatic Biodegradation of lignin-cellulose complex in plant origin material / R. Varnaite, V. Raudoniene, Bridziuviene D. // Materials science. – 2011. – Vol. 17, № 3 – P. 99–103.
2. Alessandra P. Induction and transcriptional regulation of laccases in fungi / P. Alessandra, P. Giardina, V. Lettera, C. Pezzella, G. Sannia, V. Faraco // Curr Genomics. – 2011. – Vol. 12, №2 – P.104–112.
3. Арбузов Н.А. Изучение редуцирующих свойств штаммов грибов Trichoderma viride Pers. На биоразлагаемые полимерные материалы / Н.А. Арбузов, Т.И. Громовых// материалы X международной найчной конференции студентов и молодых ученых [Живые системы и биологическая безопасность населения], 2012 г. – Москва,2012. – С. 12–13.
4. Гаврилова В.П. Королева О.В. Перспективы промышленного получения специфических белков и биологических катализаторов из базидиомицетов / В.П. Гаврилова, О.В. Королева // тез. докл. и выступл. I съезд микологов России, 11–13 апреля 2002 г. – Москва, 2002.– С.294–295.
5. Симонова В.В. Методы утилизации технических лигнинов / В.В. Симонова, Т.Г. Щедрик, Б.Н. Кузнецов // Journal of Siberian federal university. – 2010. – № 4. – С. 340–354.

УДК 539.3:534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВТОРЫЕ ГАРМОНИКИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН КРУЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ С ОБОБЩЕННЫМИ СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Д. В. Кравцов, В. И. Сторожев

Резюме. С использованием модели геометрически и физически нелинейного физического деформирования, основывающейся на теории конечных деформаций и выборе квадратичного упругого потенциала в форме Мурнагана, построено аналитическое решение задачи о малых нелинейных ангармонических возмущениях при распространении нормальных упругих волн кручения в изотропном цилиндре с обобщёнными смешанными граничными условиями на боковой поверхности. Проанализированы кинематические характеристики нелинейных вторых гармоник для осесимметричных крутильных волн с различными относительными длинами в цилиндре из молибдена при задании ряда значений параметра смешанных граничных условий.

Ключевые слова: упругие цилиндры, волны кручения, нелинейные вторые гармоники.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении волн деформаций играет важную роль для приложений в акустоэлектронике, ультраакустической дефектоскопии, сейсмоакустике и механике конструкций [5,6,9,10]. Однако ввиду сложности соответствующих задач эти эффекты с достаточной полнотой исследованы в основном для плоских и цилиндрических объёмных волн [5,10]. В последнее десятилетие исследования по теории слабонелинейных упругих волн были распространены на проблемы анализа ангармонических эффектов в полях нормальных волн в упругом слое с различными типами граничных условий на плоскостях [3,4,7-9]. Проведены также исследования свойств нелинейных упругих нормальных волн в изотропных цилиндрах с закреплённой и свободной боковой поверхностью [1,2,11]. Однако проблема описания нелинейных вторых гармоник нормальных волн в цилиндрах с обобщёнными смешанными краевыми условиями, отражающими, в частности, наличие на боковой поверхности массивных покрытий или контакт этой поверхности с линейными упругими основаниями, остаётся неисследованной и рассматривается в данной работе для случая осесимметричных нормальных волн кручения.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Рассматривается изотропный упругий цилиндр, занимающий область $V=\{0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\infty<z<\infty\}=\{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}\le 1,\ -\infty<x_3<\infty\}$ в безразмерных цилиндрических $Or\theta z$ и безразмерных прямоугольных декартовых координатах $Ox_1x_2x_3$. Описываются малые нелинейные ангармонические возмущения (нелинейные вторые гармоники), генерируемые при распространении в цилиндре осесимметричных нормальных упругих волн кручения в случае, когда на боковой поверхности, в отличие от рассмотренных ранее [1,2,11], заданы обобщенные смешанные краевые условия вида $(\sigma_{r\alpha}+\gamma_\alpha\cdot u_\alpha)_{r=1}=0 \quad (\alpha=r,\theta,z)$.

Используемая модель геометрически и физически нелинейного волнового деформирования [1,2,5,10,11] основывается на представлении упругого потенциала Мурнагана U с коэффициентами, выражаемыми через параметры Ламе $\lambda,\mu-$ и упругие постоянные третьего порядка l,m,n, отнесенные к нормирующему параметру $C_*=\mu$

$$U=\frac{\lambda+2\mu}{2}E_1^2-2\mu E_2+\frac{l+2m}{3}E_1^3-2mE_1E_2+nE_3;\ (1)$$

$$E_1=I_1,\ \ E_2=\frac{1}{2}(I_1^2-I_2),\ \ E_3=\frac{1}{6}(I_1^3-3I_1I_2+2I_3),\ I_1=\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz}, \qquad (2)$$

$$I_2=\varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{\theta z}\varepsilon_{z\theta}+\varepsilon_{zz}\varepsilon_{rr}-\varepsilon_{rz}\varepsilon_{zr}+\varepsilon_{rr}\varepsilon_{\theta\theta}-\varepsilon_{r\theta}\varepsilon_{\theta r},\ I_3=\varepsilon_{rr}\varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{rz}\varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{zr}.$$

Компоненты безразмерного вектора волновых упругих перемещений u_r,u_θ,u_z полагаются отнесёнными к нормирующему параметру $u_*=\max\limits_{\{r,\theta,z,t,\alpha\}}\left|\tilde{u}_\alpha(r,\theta,z,t)\right|$ с линейной размерностью. Для отношения введенных нормирующих параметров вводится обозначение $\delta=u_*/R_*$, $R_*=R$ – радиус цилиндра, и величина δ в рамках гипотезы о малости исследуемых волновых эффектов рассматривается как малый параметр $\delta<<1$. Нелинейные представления для компонентов тензора конечных деформаций в соотношениях (1) – (2) в случае описанной схемы нормирования координат и волновых упругих перемещений принимают вид

$$\varepsilon_{rr}=\varepsilon_{rr}^{(l)}\delta+\varepsilon_{rr}^{(n)}\delta^2=\frac{\partial u_r}{\partial r}\delta+[\frac{1}{2}((\frac{\partial u_r}{\partial r})^2+(\frac{\partial u_\theta}{\partial r})^2+(\frac{\partial u_z}{\partial r})^2)]\delta^2,$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\varepsilon_{\theta\theta}^{(l)}\delta+\varepsilon_{\theta\theta}^{(n)}\delta^2=(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r})\delta+[\frac{1}{2}((\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{u_\theta}{r})^2+(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r})^2+(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta})^2]\delta^2,\ldots,\mathbf{(3)}$$

$$\varepsilon_{r\theta}=\varepsilon_{r\theta}^{(l)}\delta+\varepsilon_{r\theta}^{(n)}\delta^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{u_\theta}{r}))\delta+\frac{1}{2}[\frac{\partial u_r}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r})+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r})+$$

$$+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r})+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}]\delta^2.$$

Для отнесенных $\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}$ к C_* нормированных компонентов несимметричного тензора нелинейных динамических напряжений Лагранжа приближенные представления, содержащие только линейные и квадратичные члены по малому параметру δ, принимают вид

$$\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha) = \sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha)\delta + \sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(u_\alpha)\delta^2 \quad (\alpha,\beta = r,\theta,z), \tag{4}$$

а для составляющих $\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{(n)}$ соответственно справедливы выражения:

$$\sigma_{rr}^{(l)} = \frac{2\nu}{1-2\nu} I_1^{(l)} + 2\varepsilon_{rr}^{(l)}, \qquad \sigma_{\theta\theta}^{(l)} = \frac{2\nu}{1-2\nu} I_1^{(l)} + 2\varepsilon_{\theta\theta}^{(l)}, \ldots, \ \sigma_{r\theta}^{(l)} = 2\varepsilon_{r\theta}^{(l)}; \tag{5}$$

$$\sigma_{rr}^{(n)} = \frac{2\nu}{1-2\nu} I_1^{(n)} + 2\varepsilon_{rr}^{(n)} + \frac{l}{\mu}(I_1^{(l)})^2 - (2\frac{m}{\mu} - \frac{n}{\mu})I_2^{(n)} + (2\frac{m}{\mu} - \frac{n}{\mu})I_1^{(l)}\varepsilon_{rr}^{(l)} +$$

$$+\frac{n}{\mu}(\varepsilon_{rr}^{(l)}\varepsilon_{rr}^{(l)} + \varepsilon_{r\theta}^{(l)}\varepsilon_{\theta r}^{(l)} + \varepsilon_{rz}^{(l)}\varepsilon_{zr}^{(l)}) + \frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial r}(\frac{2\nu}{1-2\nu} I_1^{(l)} + 2\varepsilon_{rr}^{(l)}) + 2(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^{(l)}}{r})\varepsilon_{r\theta}^{(l)} + 2\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial z}\varepsilon_{zr}^{(l)}, \ldots, \tag{6}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(n)} = 2\varepsilon_{r\theta}^{(n)} + (2\frac{m}{\mu} - \frac{n}{\mu})I_1^{(l)}\varepsilon_{r\theta}^{(l)} + \frac{n}{\mu}(\varepsilon_{rr}^{(l)}\varepsilon_{r\theta}^{(l)} + \varepsilon_{r\theta}^{(l)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(l)} + \varepsilon_{rz}^{(l)}\varepsilon_{z\theta}^{(l)}) + 2\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial r}\varepsilon_{r\theta}^{(l)} +$$

$$+(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^{(l)}}{r})(\frac{2\nu}{1-2\nu} I_1^{(l)} + 2\varepsilon_{\theta\theta}^{(l)}) + 2\frac{\partial u_r^{(l)}}{\partial z}\varepsilon_{z\theta}^{(l)}.$$

Волновое динамическое деформирование цилиндра описывается системой уравнений движений, имеющей вид

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} - \delta(\rho R_*^2 / c_*)\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0, \\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{\theta r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\theta}}{r} - \delta(\rho R_*^2 / c_*)\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = 0, \\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{zr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \delta(\rho R_*^2 / c_*)\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

В рамках используемого подхода компоненты вектора упругих волновых перемещений u_α представляются в виде суммы $u_\alpha = u_\alpha^{(l)} + \delta u_\alpha^{(n)}$ $(\alpha = r,\theta,z)$, включающей линейные составляющие $u_\alpha^{(l)}$ и нелинейные ангармонические возмущения $u_\alpha^{(n)}$. После введения этого представления в соотношения (4) – (6) приближенные представления для $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha)$ в виде суммы линейных и квадратичных членов по степеням δ принимают вид $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha) = \sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(l)})\delta + \left(\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(n)}) + \sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)})\right)\delta^2$ $(\alpha,\beta = r,\theta,z)$. При подстановке таких представлений $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha)$ в уравнения движения (7) и обобщенные смешанные граничные условия получена следующая рекуррентная последовательность краевых задач, в которой задача определения $u_\alpha^{(l)}$ представляет собой задачу определения спектра осесимметричных нормальных волн кручения в изотропном цилиндре с краевыми условиями вида

$$(\sigma_{r\beta}^{(l)}(u_r^{(l)}, u_\theta^{(l)}, u_z^{(l)}) + \gamma_\beta \cdot u_\beta^{(l)})_{r=1} = 0 \qquad (\beta = r,\theta,z), \tag{8}$$

а ангармонические возмущения определяются из краевой задачи

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}^{(l)}(u_r^{(n)},u_\theta^{(n)},u_z^{(n)}))+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(l)}(u_r^{(n)},u_\theta^{(n)},u_z^{(n)})}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{rz}^{(l)}(u_r^{(n)},u_\theta^{(n)},u_z^{(n)})}{\partial z}-\frac{\sigma_{\theta\theta}^{(l)}(u_r^{(n)},u_\theta^{(n)},u_z^{(n)})}{r}-$$

$$-\delta(\rho R_*^2/c_*)\frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial t^2}=-(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}^{(n)}(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}))+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(n)}(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)})}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{\partial\sigma_{rz}^{(n)}(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)})}{\partial z}-\frac{\sigma_{\theta\theta}^{(n)}(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)})}{r}), \qquad (9)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{\theta r}^{(l)}(u_r^{(n)},u_\theta^{(n)},u_z^{(n)}))+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}^{(l)}(u_r^{(n)},u_\theta^{(n)},u_z^{(n)})}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}^{(l)}(u_r^{(n)},u_\theta^{(n)},u_z^{(n)})}{\partial z}+$$

$$+\frac{\sigma_{r\theta}^{(l)}(u_r^{(n)},u_\theta^{(n)},u_z^{(n)})}{r}-\delta(\rho R_*^2/c_*)\frac{\partial^2 u_\theta^{(n)}}{\partial t^2}=-(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{\theta r}^{(n)}(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}))+$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}^{(n)}(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)})}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}^{(n)}(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)})}{\partial z}+\frac{\sigma_{r\theta}^{(n)}(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)})}{r}),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{zr}^{(l)}(u_r^{(n)},u_\theta^{(n)},u_z^{(n)}))+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{z\theta}^{(l)}(u_r^{(n)},u_\theta^{(n)},u_z^{(n)})}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zz}^{(l)}(u_r^{(n)},u_\theta^{(n)},u_z^{(n)})}{\partial z}-\delta(\rho R_*^2/c_*)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 u_z^{(n)}}{\partial t^2}=-(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{zr}^{(n)}(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)}))+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{z\theta}^{(n)}(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)})}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zz}^{(n)}(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)})}{\partial z});$$

$$(\sigma_{r\beta}^{(n)}(u_r^{(l)},u_\theta^{(l)},u_z^{(l)})+\sigma_{r\beta}^{(l)}(u_r^{(n)},u_\theta^{(n)},u_z^{(n)})+\gamma_\beta\cdot u_\beta^{(n)})_{r=1}=0 \qquad (\beta=r,\theta,z). \quad (10)$$

Первый этап решения заключается в описании спектра осесимметричных свободных нормальных упругих волн крутильного типа из моды с произвольным номером p в изотропном круговом цилиндре с обобщенными смешанными граничными условиями на боковой поверхности. Решение задачи первого приближения имеет вид $u_\theta=u^{(0)}J_1(\beta r)exp[-i(wt-kz)]$, $u_r\equiv 0$, $u_z\equiv 0$, $\Omega=(\beta_p^2+k^2)^{1/2}$, где $u^{(0)}$ – произвольный амплитудный коэффициент; ω,k – соответственно круговая частота и приведенное нормированное волновое число; $\Omega=(\rho\cdot\omega^2\cdot R_*^2/C_*)^{1/2}$ – безразмерный приведенный частотный параметр. Спектр осесимметричных линейных упругих волн кручения в рассматриваемом цилиндре определяет дисперсионное уравнение

$$\beta\cdot J_0(\beta)-2\cdot J_1(\beta)+\gamma_\theta\cdot J_1(\beta)=0 \qquad (11)$$

При построении решения задачи нелинейного приближения с учетом структуры второго уравнения из системы неоднородных дифференциальных уравнений (9)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{\theta r}^{(l)}(u_\theta^{(n)}))+\frac{\partial\sigma_{\theta z}^{(l)}(u_\theta^{(n)})}{\partial z}+\frac{\sigma_{\theta r}^{(l)}(u_\theta^{(n)})}{r}-(\rho R_*^2/c_*)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_\theta^{(n)}=0, \qquad (12)$$

$$\sigma_{\theta z}^{(l)}=iku_\theta(r)exp[-i(wt-kz)], \quad \sigma_{r\theta}^{(l)}=(-\frac{u_\theta(r)}{r}+\frac{\partial u_\theta(r)}{\partial r})exp[-i(wt-kz)],$$

которое в данном случае является однородным, устанавливается, что компонента $u_\theta^{(n)}$ для второй гармоники монохроматической осесимметричной нормальной волны кручения является тождественно нулевой и анализу подлежит неоднородная краевая задача по определению компонент $u_r^{(n)}=u_r^{(0,n)}(r)exp[-2i(wt-kz)]$, $u_z^{(n)}=u_z^{(0,n)}(r)exp[-2i(wt-kz)]$ из краевой задачи вида

$$\Delta_{11}^{(1)}u_r^{(0,n)}+\Delta_{12}^{(1)}\frac{u_r^{(0,n)}}{r^2}+\Delta_{13}^{(1)}\frac{(u_r^{(0,n)})'}{r}+\Delta_{14}^{(1)}(u_z^{(0,n)})'+\Delta_{15}^{(1)}(u_r^{(0,n)})''=(u^{(0)})^2[\Delta_{11}^{(2)}\frac{(J_1(\alpha r))^2}{r^3}+$$

$$+\Delta_{12}^{(2)}\frac{(J_1(\alpha r))^2}{r}+\Delta_{13}^{(2)}J_1(\alpha r)\frac{dJ_1(\alpha r)}{dr}+\Delta_{14}^{(2)}\frac{J_1(\alpha r)}{r^2}\frac{dJ_1(\alpha r)}{dr}+\Delta_{15}^{(2)}\frac{1}{r}(\frac{dJ_1(\alpha r)}{dr})^2+$$

$$+\Delta_{16}^{(2)}\frac{J_1(\alpha r)}{r}\frac{d^2J_1(\alpha r)}{dr^2}+\Delta_{17}^{(2)}\frac{dJ_1(\alpha r)}{dr}\frac{d^2J_1(\alpha r)}{dr^2}], \quad (13)$$

$$\Delta_{21}^{(1)}u_z^{(0,n)}+\Delta_{22}^{(1)}\frac{u_r^{(0,n)}}{r}+\Delta_{23}^{(1)}(u_r^{(0,n)})'+\Delta_{24}^{(1)}\frac{(u_z^{(0,n)})'}{r}+\Delta_{25}^{(1)}(u_z^{(0,n)})''=(u^{(0)})^2[\Delta_{21}^{(2)}J_1(\alpha r)^2+$$

$$+\Delta_{22}^{(2)}\frac{J_1(\alpha r)^2}{r^2}+\Delta_{23}^{(2)}\frac{J_1(\alpha r)}{r}\frac{dJ_1(\alpha r)}{dr}+\Delta_{24}^{(2)}(\frac{dJ_1(\alpha r)}{dr})^2+\Delta_{25}^{(2)}(J_1(\alpha r))(\frac{d^2J_1(\alpha r)}{dr^2})];$$

$$(\sigma_{rr}^{(l)}(u_r^{(n)},u_z^{(n)})+\sigma_{rr}^{(n)}(u_\theta^{(l)})+\gamma_r\cdot u_r^{(n)})_{r=1}=0,(\sigma_{rz}^{(l)}(u_r^{(n)},u_z^{(n)})+\sigma_{rz}^{(n)}(u_\theta^{(l)})+\gamma_z\cdot u_z^{(n)})_{r=1}=0 \quad (14)$$

Частные решения системы дифференциальных уравнений (13) построены с использованием приема замены цилиндрических функций Бесселя первого рода соответствующими представлениями в виде абсолютно сходящихся степенных рядов по переменной r. Разработанный компьютерный алгоритм аналитических преобразований трансформирует полные представления правых частей исследуемых уравнений в степенные ряды.

$$\Delta_{11}^{(1)}u_r^{(0,n)}+\Delta_{12}^{(1)}\frac{u_r^{(0,n)}}{r^2}+\Delta_{13}^{(1)}\frac{(u_r^{(0,n)})'}{r}+\Delta_{14}^{(1)}(u_z^{(0,n)})'+\Delta_{15}^{(1)}(u_r^{(0,n)})''=(u^{(0)})^2\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p r^p,$$

$$\Delta_{21}^{(1)}u_z^{(0,n)}+\Delta_{22}^{(1)}\frac{u_r^{(0,n)}}{r}+\Delta_{23}^{(1)}(u_r^{(0,n)})'+\Delta_{24}^{(1)}\frac{(u_z^{(0,n)})'}{r}+\Delta_{25}^{(1)}(u_z^{(0,n)})''=(u^{(0)})^2\sum_{p=1}^{\infty}\beta_p r^p, \quad (15)$$

В итоге полное решение системы дифференциальных уравнений (16) получено в виде

$$u_r^{(n)}=[-2A_1\tilde{\alpha}J_1(2\tilde{\alpha}r)+A_2i2kJ_1(2\tilde{\beta}r)+(u^{(0)})^2F_1(r)]\exp[-2i(wt-kz)],$$

$$u_z^{(n)}=[A_1i2kJ_0(2\tilde{\alpha}r)-2A_2\tilde{\beta}J_0(2\tilde{\beta}r)+(u^{(0)})^2F_2(r)]\exp[-2i(wt-kz)], \quad (16)$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные коэффициенты; F_j – частные решения системы уравнений (15) в рядах $F_1(r)=\sum_{p=1}^{\infty}a_pr^p, F_2(r)=\sum_{p=1}^{\infty}b_pr^p$, с коэффициентами, определяемыми из рекуррентных формул

$$a_1=\alpha_1/\Delta_{13}^{(n)},\ \ b_1=\beta_1/\Delta_{23}^{(n)};\ a_2=\frac{\alpha_2-b_1\Delta_{14}^{(n)}}{\Delta_{12}^{(n)}+2\Delta_{13}^{(n)}+2\Delta_{15}^{(n)}},\ b_2=\frac{\beta_2-a_1(\Delta_{22}^{(n)}-\Delta_{24}^{(n)})}{2\Delta_{23}^{(n)}+2\Delta_{25}^{(n)}};$$

$$a_{p+2}=\frac{\alpha_{p+2}-\Delta_{11}^{(n)}a_p-\Delta_{14}^{(n)}(p+1)b_{p+1}}{\Delta_{12}^{(n)}+\Delta_{13}^{(n)}(p+2)+\Delta_{15}^{(n)}(p+2)(p+1)};\ b_{p+2}=\frac{\beta_{p+2}-\Delta_{21}^{(n)}b_p-\Delta_{22}^{(n)}a_{p+1}-\Delta_{24}^{(n)}(p+1)a_{p+1}}{\Delta_{23}^{(n)}(p+2)+\Delta_{25}^{(n)}(p+2)(p+1)}$$

$$(p=\overline{1,\infty}).$$

После подстановки представлений (16) в краевые условия (14), в предположении о том, что точки $(2k,2\Omega)$ не принадлежат какой – либо из мод дисперсионного спектра линейных осесимметричных нормальных волн продольно-сдвигового типа в цилиндре с рассматриваемым типом граничных условий, определяются выражения для A_1, A_2, вида

$$A_1=(u^{(0)})^2(\chi_{12}F_2(R)-\chi_{22}F_1(R))/(\chi_{11}\chi_{22}-\chi_{21}\chi_{12}),$$

$$A_2=(u^{(0)})^2(\chi_{11}F_2(R)-\chi_{21}F_1(R))/(\chi_{12}\chi_{21}-\chi_{11}\chi_{22}),$$

$$\chi_{11} = -2\tilde{\alpha} J_1(2\tilde{\alpha} r)\cdot\gamma_r + \frac{4k^2 \nu J_0(2\tilde{\alpha})}{1-2\nu} - \frac{4\alpha\nu J_1(2\tilde{\alpha})}{1-2\nu} - 2\tilde{\alpha}^2 (2 + \frac{2\nu}{1-2\nu})[J_0(2\tilde{\alpha}) - J_2(2\tilde{\alpha})],$$

$$\chi_{12} = ikJ_1(2\tilde{\beta} r)\cdot\gamma_r + \frac{4ik\tilde{\beta}\nu J_0(2\tilde{\beta})}{1-2\nu} + \frac{4ik\nu J_1(2\tilde{\beta})}{1-2\nu} + 2i\beta k(2 + \frac{2\nu}{1-2\nu})[J_0(2\tilde{\beta}) - J_2(2\tilde{\beta})],$$

$$\chi_{21} = ikJ_0(2\tilde{\alpha} r)\cdot\gamma_z - 6i\tilde{\alpha} kJ_1(2\tilde{\alpha}), \qquad \chi_{22} = -2\tilde{\beta} J_0(2\tilde{\beta} r)\cdot\gamma_z + 4\tilde{\beta}^2 J_1(2\tilde{\beta}) - 2k^2 J_1(2\tilde{\beta})$$

Полученная аналитическая форма представлений комплексных функций волновых перемещений позволяет провести анализ ряда амплитудно-частотных эффектов в нелинейных ангармонических возмущениях.

Достаточно полную информацию о кинематических свойствах нелинейных вторых гармоник дают рассчитываемые распределения нормированных амплитуд компонентов вектора волновых перемещений по радиальной координате в плоскости сечения цилиндра. В частности, распределения нормированных амплитуд компонентов вектора волновых перемещений по радиальной координате в плоскости сечения цилиндра приведены на рис.1 и рис.2 для ранее рассматривавшихся случаев анализа вторых гармоник нормальных волн кручения с относительной длиной $10R_*$ из низших мод с ненулевой частотой затирания соответствующих дисперсионных спектров для цилиндра из молибдена с закреплённой и свободной граничной поверхностью [1,2,11], а на рис.3, рис.4 – соответственно для случаев задания на границе обобщённых смешанных граничных условий с параметрами $\{\gamma_\theta = 0.2,\ \gamma_r = 0.1,\ \gamma_z = 0.1\}$ и $\{\gamma_\theta = -0.2,\ \gamma_r = -0.1,\ \gamma_z = -0.1\}$. В качестве выводов о свойствах рассчитанных распределений можно указать на то, что при $\gamma_\theta = 0.2$ нелинейная вторая гармоника является преимущественно продольной, а при $\gamma_\theta = -0.2$ - преимущественно поперечной; формы перемещений во вторых гармониках существенно отличаются от случаев закреплённой и свободной поверхностей при $\gamma_\theta = 0.2$; уровни нелинейных ангармонических возмущений снижаются по сравнению со случаем свободной границы, являются большими при $\gamma_\theta = -0.2$ и в обоих рассмотренных случаях существенно превышают соответствующие уровни для закреплённого цилиндра.

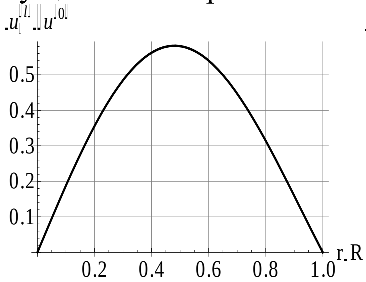

Рис. 1.а)

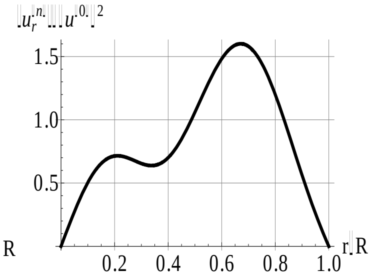

Рис. 1.б)

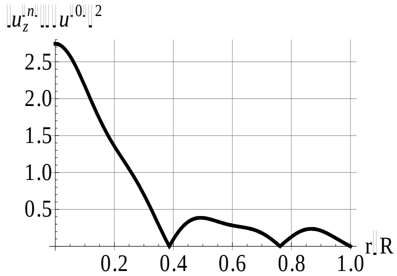

Рис. 1.в)

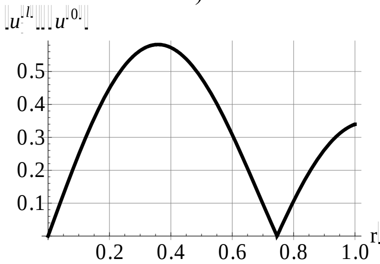

Рис. 2.а)

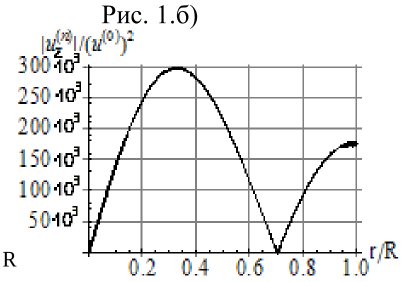

Рис. 2.б)

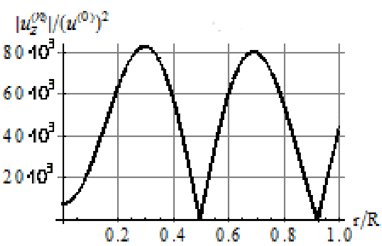

Рис. 2.в)

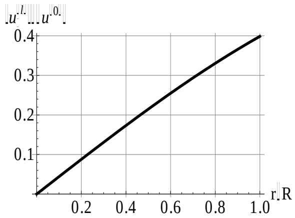

Рис. 3.а)

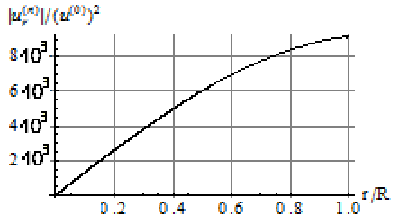

Рис. 3.б)

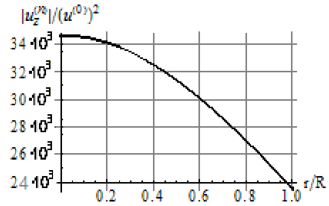

Рис. 3.в)

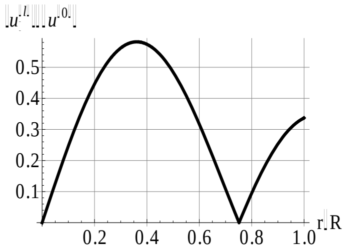

Рис. 4.а)

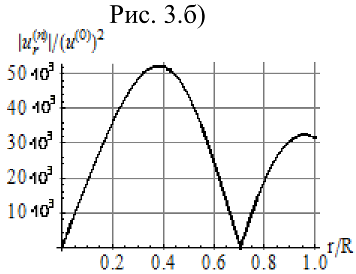

Рис. 4.б)

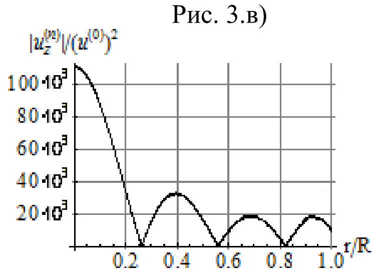

Рис. 4.в)

ВЫВОДЫ

В работе в рамках апробированной модели квадратичного геометрически и физически нелинейного динамического деформирования получено численно-аналитическое решение не рассматривавшейся ранее актуальной задачи анализа нелинейных вторых гармоник осесимметричных нормальных волн кручения в изотропном цилиндре с обобщёнными смешанными граничными условиями на границе. Представленные результаты обобщают полученные ранее решения для цилиндров со свободной и закреплённой боковой поверхностью. Приведены отдельные результаты анализа кинематических характеристик исследуемых волн. Результаты исследования перспективны для использования в акустоэлектронике, ультраакустической дефектоскопии,сейсмоакустике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елагин А.В. Влияние типа краевых условий на уровни вторых гармоник осесимметричных нормальных волн кручения в цилиндре / А.В.Елагин, В.И. Сторожев // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 315–324.

2. Елагин А.В. Генерирование нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения в про тяженном цилиндре при разнотипных краевых условиях / А.В. Елагин, И.А. Моисеенко // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2013. – №2(174) – С. 29–32.

3. Куслива А.О. Нелінійні ефекти при розповсюдженні монохроматичних пружних SH хвиль в анізотропному шарі з гнучкими нерозтяжними покриттями граней / А. О. Куслива // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2008. – № 2. – С. 81–87.

4.Кусливая А.А. Нелинейные эффекты при распространении нормальных P-SV волн в слое со скользящей заделкой граней / А.А. Кусливая, В.И. Сторожев // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип. 14. – С. 313 – 319.

5. Рущицкий Я.Я. О высших приближениях при анализе нелинейных цилиндрических волн в гиперупругой среде / Я.Я. Рущицкий, Я.В. Симчук // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, №6. – С.63–72.

6. Holzapfel G.A. Nonlinear solid mechanics. A continuum approach for engineering / G.A. Holzapfel. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2006. – 303p.

7. Kurennaya K.I. Analyses of nonlinear ultraacoustic wave properties in germanium monocrystal / K.I.

8. Kurennaja, V.I. Storozhev // J. of Computational and Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 6, No. 1. P. 67–82.

9. Kuslivaya A. Nonlinear anharmonic effects for normal waves in monocrystal anisotropic germanium layer with flexible not extensible coverings of sides / A. Kuslivaya, V. Storozhev // 9-th Conference on Dynamic systems theory and applications (Lodz, Poland, December 17-20, 2007). – 2007. – P.433–440.

10. Muller M.F. Characteristics of second harmonic generation of lamb waves in nonlinear elastic plates / M.F. Muller, J. Kim, J.Y. Qu, L.J. Jacobs // J. Acoust. Soc. Am. – 2010. –Vol. 127. – P. 2141–2152.

11. Rushchitsky J.J. Higher-order approximations in the analysis of nonlinear cylindrical waves in hyperelastic medium / J.J. Rushchitsky, J.V. Symchuk // Int. Appl. Mech. – 2007. – V. 43, N. 4. – P. 388–394.
12. Yelagin A.V. Nonlinear second harmonics axisymmetric waves of torsion in a cylindrical waveguide with a clamped surface / A.V. Yelagin, V.I. Storozhev // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип. 14. – С. 347 – 353.

УДК 532.522:518.5

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ІМПУЛЬСНОГО СТРУМЕНЯ РІДИНИ В ПОВІТРІ

Я. А. Лисих, М. В. Безкровна

Резюме. В даній статті розглянуте гідродинамічне моделювання поширення імпульсного струменя рідини в повітрі. Встановленні критерії подібності у вигляді безрозмірних комплексів.
Ключові слова: гідродинамічне моделювання, безрозмірні комплекси, критерії динамічної подібності.

Як відомо, моделювання ґрунтується на розгляді фізично подібних явищ. Процеси будуть подібні, якщо:

1) описуються однаковими рівняннями;
2) початкові і граничні умови співпадають з точністю до постійних;
3) однойменні критерії подібності рівні.

Отримання критеріїв подібності шляхом приведення системи рівнянь і умов однозначності до безрозмірного вигляду практично може бути надійним, якщо відомо, що цих рівнянь і умов достатньо для існування однозначного та сталого рішення. [1,2]

Перші дві умови вимагають дотримання повної подібності: геометричного, кінематичного і динамічного. Тобто повинні виконуватися закони механічної подібності. Ці закони визначають умови подібності і встановлюють функціональні залежності між основними величинами, що характеризують механічно подібні потоки. Такі потоки механічно копіюють один одного.

Механічна подібність потоків передбачає геометричну, кінематичну і динамічну їх подібність.

У гідромеханіці під геометричною подібністю розуміють подібність тих поверхонь, які обмежують потоки рідин або газів незалежно від того, чи належать ці поверхні твердих тіл або є вільними поверхнями. Іншими словами, усі розміри одного потоку можуть бути отримані з подібних розмірів іншого потоку при множенні їх на постійний множник – масштаб.

Це можна записати наступним чином:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{d_1}{d_2}, \quad \varphi_m = \varphi_n, \qquad (1)$$

де l і d – розміри потоку (індекси 1 і 2 означають, що розмір узятий в першому і другому потоках).

Наведене рівняння може бути записано інакше

$$\left(\frac{l}{d}\right)_1 = \left(\frac{l}{d}\right)_2 .$$

Кінематична подібність може бути сформульована таким чином: якщо два потоки обмежені геометрично подібними поверхнями і швидкість в їх подібних точках пропорційна, такі потоки називаються кінематично подібними.

$$\left(\frac{v}{w}\right)_1 = \left(\frac{v}{w}\right)_2 , \qquad (2)$$