

листьев наблюдается у *P. deltoides* Marsch. и *P. trichocarpa*; более позднее – у *P. simonii*, f. *pendula* и f. *fastigiata*. Полученные результаты планируем использовать в рекомендациях по озеленению рекреационных зон г. Донецка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богданов П. Л. Тополя и их культура / П. Л. Богданов. – Москва: Лесная промышленность, 1965. – 103 с.
2. Якушина Э. И. О перспективности использования тополей в озеленении Москвы. – В кн.: Древесные растения в природе и культуре. М.: Наука, 1983. – 224 с.
3. Методика фенологических наблюдений в ботанических садах СССР/ Бюлл. Гл. ботан. сада АН СССР. – 1979. – Вып. 113. – С. 3 – 8.
4. Бейдеман И. Н. Методика изучения фенологии растений и растительных сообществ / И. Н. Бейдеман. – Новосибирск: Наука, 1974. – 155 с.
5. Шульц Г. Э. Общая фенология / Г. Э. Шульц. – Ленинград: Наука, 1987. – 188 с.
6. Зайцев Г. Н. Математическая статистика в экспериментальной ботанике / Г. Н. Зайцев. – М: Наука, 1984. – 424 с.

УДК 512.542.7+512.547.2

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК A_4

Е. А. Оберемок, В. В. Штепин

Резюме. Настоящая работа посвящена построению геометрического графа группы A_4 (группы вращений тетраэдра) и вычислению соответствующего ему геометрического представления.

Ключевые слова: группа подстановок A_4 , геометрический граф конечной группы, геометрическое представление.

Вступление.

Существующее в теории групп определение графа группы не совсем удобно ввиду некоторых причин [1]. К примеру, граф группы строится неоднозначно и существенно зависит от выбора набора образующих. В зависимости от выбора образующих граф группы может иметь разное количество ребер [2]. До сих пор не существует алгоритма, позволяющего построить «стандартный» граф группы. Поэтому в [1] было рассмотрено новое понятие «геометрического графа» группы, которое лишено подобных недостатков. Кроме того, геометрическое представление также является новым объектом в теории групп, и является очень перспективным с точки зрения теории представлений.

Определение 1. Геометрический граф группы G (геометрическая реализация) – граф группы G на сфере единичного радиуса в евклидовом пространстве R^m наименьшей размерности (обозначим его V), в котором евклидовы расстояния ρ (назовем их действительными) между элементами группы удовлетворяют соотношению

$$\rho(g_i, g_j) = \rho(g_k, g_l) \Leftrightarrow \rho'(g_i, g_j) = \rho'(g_k, g_l) \quad \forall i, j, k, l, \quad (1)$$

где ρ' – расстояния (назовем их мнимыми) между элементами группы G , вычисленные по формуле:

$$\rho'(g_i, g_j) = \begin{cases} \sum_{x \in G} \sigma_x(g_i, g_j), & \text{если } i \neq j \\ 0, & \text{если } i = j \end{cases}, \quad (2)$$

где $\sigma_x(g_i, g_j)$ – наименьший целый неотрицательный показатель степени k , для которого справедливо равенство: $x^k g_i = g_j$ или, если такое k не существует, то $\sigma_x(g_i, g_j) = 0$ [1].

Определение 2. Две реализации G_1 и G_2 геометрического графа группы G в R^m будем называть эквивалентными, если существует ортогональное преобразование \mathcal{Y} такое, что $\mathcal{Y}G_1 = G_2$. [1]

Предложение 1. Для любого геометрического графа конечной группы G справедливо тождество:

$$\sum_{x \in G} \cos \angle(e, x) = 0, \quad (3)$$

где e – вектор графа, отвечающий нейтральному элементу группы G .

Предложение 2. Для любых элементов x, y, g группы G имеет место равенство:

$$\rho'(x, y) = \rho'(gx, gy) \quad (4)$$

Предложение 3. Отображение из G в $GL(V)$, задаваемое соответствием $g \rightarrow T(g)$, является линейным представлением группы G .

Геометрический граф группы A_4

Построим геометрический граф группы подстановок A_4 и исследуем его геометрическое представление. Пользуясь формулой (2) мнимых расстояний, можем составить таблицу мнимых расстояний. Поскольку $\rho(a, b) = \rho(x, y) \Leftrightarrow \rho'(a, b) = \rho'(x, y)$ для любых $a, b, x, y \in G$, то по таблице мнимых расстояний можно составить таблицу действительных расстояний. Заметим, что $\rho(a, b) = \rho(x, y) \Leftrightarrow s(a, b) = s(x, y)$, где $s(a, b)$ – расстояние между концами векторов a и b , вычисленное по поверхности единичной сферы в сферической геометрии. А это не что иное, как косинус угла между векторами a и b . Поэтому составление таблицы мнимых расстояний равносильно составлению таблицы косинусов.

Введем обозначения для классов сопряженных элементов группы A_4 : $C_1 = \{e\}$, $C_2 = \{(12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$, $C_3 = \{(134), (123), (142), (243)\}$, $C_4 = \{(124), (132), (143), (234)\}$.

Тогда косинусы углов между векторами (x, y) графа A_4 можно представить так:

$$\cos \angle(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y; \\ \cos \alpha, & \text{если } x, y \in C_1 \cup C_2, \text{ или } x, y \in C_3, \text{ или } x, y \in C_4, x \neq y; \\ \cos \beta, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Теорема 1. Для группы подстановок A_4 размерность пространства V равна 9.

Геометрический граф группы подстановок A_4 в R^9 задается углами $\alpha = \arccos(-\frac{1}{3})$,

$\beta = \frac{\pi}{2}$, причем этот граф единственный с точностью до ортогонального преобразования

евклидова пространства R^9 .

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Если граф реализуется в R^8 (или размерности меньше), то любые 9 векторов линейно зависимы, следовательно, их определитель Грама равен нулю. С помощью таблицы косинусов находим

$$G(e, (14)(23), (12)(34), (13)(24), (243), (142), (123), (134), (234)) =$$

$$= (\cos \alpha - 1)^6 (3 \cos \alpha - 4 \cos \beta + 1)(3 \cos \alpha - 8 \cos^2 \beta + 4 \cos \beta + 1) = 0$$

Кроме того, по формуле (3) из предложения 1 имеем:

$$3 \cos \alpha + 8 \cos \beta + 1 = 0.$$

Таким образом, имеем две возможности: $\begin{cases} 3 \cos \alpha - 4 \cos \beta = -1 \\ 3 \cos \alpha + 8 \cos \beta = -1 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} 3 \cos \alpha - 8 \cos^2 \beta + 4 \cos \beta = -1 \\ 3 \cos \alpha + 8 \cos \beta = -1 \end{cases}.$$

В первом случае получаем $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{3} \\ \cos \beta = 0 \end{cases}$. С учетом этих соотношений

$$G(e, (14)(23), (12)(34), (142), (123), (134), (234), (143), (124)) =$$

$$= (\cos \alpha - 1)^6 (2 \cos \alpha + 6 \cos \beta + 1)(1 + 2 \cos \alpha - 3 \cos \beta)^2 = \frac{4096}{19683} \neq 0.$$

Получили противоречие.

Рассмотрим второй случай. Получим $\cos \alpha = -\frac{1}{3}(-1 - 8 \cos \beta)$, откуда либо

$2 \cos \beta + 1 = 0$, либо $\cos \beta = 0$. Если $2 \cos \beta + 1 = 0$, то $\cos \beta = -\frac{1}{2}$, а $\cos \alpha = 1$ – противоречие с определением геометрического графа группы. Если $\cos \beta = 0$, то получим $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Снова получаем, что определитель Грама

$G(e, (14)(23), (12)(34), (142), (123), (134), (234), (143), (124))$ не равен нулю, что противоречит нашему предположению. Значит, геометрический граф группы A_4 реализуется в пространстве размерности не менее 9.

Во второй части доказательства покажем, что реализация геометрического графа в пространстве R^9 существует. Для этого предположим, что определитель Грама любых 10 векторов равен нулю. С помощью таблицы 1 находим $G(e, (14)(23), (12)(34), (13)(24), (243), (142), (123), (134), (234), (143)) = -(\cos \alpha - 1)^7 \cdot$

$$\cdot (3 \cos \alpha - 4 \cos \beta + 1)(3 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha + 4 \cos \alpha \cdot \cos \beta - 16 \cos^2 \beta + 4 \cos \beta + 1) = 0$$

Получаем две возможности: $3 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha + 4 \cos \alpha \cdot \cos \beta - 16 \cos^2 \beta + 4 \cos \beta + 1 = 0$ или $3 \cos \alpha - 4 \cos \beta + 1 = 0$. Кроме того, используем формулу (3) из предложения 1:

$$3 \cos \alpha + 8 \cos \beta + 1 = 0. \text{ В первом случае } \cos \alpha = -\frac{1}{3}(-1 - 8 \cos \beta), \text{ а } \cos \beta = -\frac{1}{2} \text{ или}$$

$\cos \beta = 0$. При $\cos \beta = -\frac{1}{2}$ получаем $\cos \alpha = 1$ – противоречие с условием. При

$\cos \beta = 0$ получаем

$\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Во втором случае также имеем $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{3} \\ \cos \beta = 0 \end{cases}$. Далее, подставляя эти

значения и вычисляя все определители Грама 10 векторов из таблицы 1 убедимся, что все они равны нулю. Следовательно, существует графическая реализация в R^9 .

Геометрический граф группы A_4 , с точностью до ортогонального преобразования, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
e &= (1,0,0,0,0,0,0,0,0), (14)(23) = \left(-\frac{1}{3}, -\sqrt{\frac{2}{9}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0,0,0,0,0,0\right), \\
(12)(34) &= \left(-\frac{1}{3}, -\sqrt{\frac{2}{9}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0,0,0,0,0,0\right), (13)(24) = \left(-\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{8}{9}}, 0,0,0,0,0,0,0\right), \\
(243) &= (0,0,0,1,0,0,0,0,0), (142) = \left(0,0,0, -\frac{1}{3}, -\sqrt{\frac{2}{9}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0,0,0\right), \\
(123) &= \left(0,0,0, -\frac{1}{3}, -\sqrt{\frac{2}{9}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0,0,0\right), (134) = \left(0,0,0, -\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{8}{9}}, 0,0,0,0\right), (234) = (0,0,0,0,0,0,1,0,0) \\
&, (142) = \left(0,0,0,0,0,0, -\frac{1}{3}, -\sqrt{\frac{2}{9}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right), (124) = \left(0,0,0,0,0,0, -\frac{1}{3}, -\sqrt{\frac{2}{9}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \\
(132) &= \left(0,0,0,0,0,0, -\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{8}{9}}, 0\right).
\end{aligned}$$

Геометрическое представление группы A_4

Теорема 2. Геометрическое представление группы A_4 имеет характер, заданный системой:

$$\begin{cases} \chi(x) = 9, x \in C_1; \\ \chi(x) = -3, x \in C_2; \\ \chi(x) = 0, x \in C_3 \cup C_4. \end{cases}$$

Доказательство. Для любой из реализаций геометрического графа векторы $e, (14)(23), (12)(34), (243), (142), (123), (234), (143), (124)$ линейно независимы.

Следовательно, они образуют базис. Найдем матрицы операторов $T_G((13)(24))$ и $T_G((134))$ в этом базисе. Для этого разложим вначале вектор $(13)(24)$ по базису.

$$(13)(24) \mapsto (13)(24) \cdot e = a_{11}e + a_{21}(14)(23) + a_{31}(12)(34) + a_{41}(243) + a_{51}(142) + a_{61}(123) + a_{71}(234) + a_{81}(143) + a_{91}(124),$$

$$(13)(24) \mapsto (13)(24) \cdot (14)(23) = a_{12}e + a_{22}(14)(23) + a_{32}(12)(34) + a_{42}(243) + a_{52}(142) + a_{62}(123) + a_{72}(234) + a_{82}(143) + a_{92}(124),$$

$$(13)(24) \mapsto (13)(24) \cdot (12)(34) = a_{13}e + a_{23}(14)(23) + a_{33}(12)(34) + a_{43}(243) + a_{53}(142) + a_{63}(123) + a_{73}(234) + a_{83}(143) + a_{93}(124),$$

$$(13)(24) \mapsto (13)(24) \cdot (243) = a_{14}e + a_{24}(14)(23) + a_{34}(12)(34) + a_{44}(243) + a_{54}(142) + a_{64}(123) + a_{74}(234) + a_{84}(143) + a_{94}(124),$$

$$(13)(24) \mapsto (13)(24) \cdot (142) = a_{15}e + a_{25}(14)(23) + a_{35}(12)(34) + a_{45}(243) + a_{55}(142) + a_{65}(123) + a_{75}(234) + a_{85}(143) + a_{95}(124),$$

$$(13)(24) \mapsto (13)(24) \cdot (123) = a_{16}e + a_{26}(14)(23) + a_{36}(12)(34) + a_{46}(243) + a_{56}(142) + a_{66}(123) + a_{76}(234) + a_{86}(143) + a_{96}(124),$$

$$(13)(24) \mapsto (13)(24) \cdot (234) = a_{17}e + a_{27}(14)(23) + a_{37}(12)(34) + a_{47}(243) + a_{57}(142) + a_{67}(123) + a_{77}(234) + a_{87}(143) + a_{97}(124),$$

$$(13)(24) \mapsto (13)(24) \cdot (143) = a_{18}e + a_{28}(14)(23) + a_{38}(12)(34) + a_{48}(243) + a_{58}(142) + a_{68}(123) + a_{78}(234) + a_{88}(143) + a_{98}(124),$$

$$(13)(24) \mapsto (13)(24) \cdot (124) = a_{19}e + a_{29}(14)(23) + a_{39}(12)(34) + a_{49}(243) + a_{59}(142) + a_{69}(123) + a_{79}(234) + a_{89}(143) + a_{99}(124).$$

Для решения этой системы мы используем явный вид векторов графа A_4 , указанный выше. Получаем матрицу линейного оператора $T_G((13)(24))$. Аналогично находим матрицу оператора $T_G((134))$:

$$T_G((13)(24)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_G((134)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Заметим, что при помощи подстановок $(13)(24)$ и (134) можно выразить все подстановки из группы A_4 . Обозначим $(13)(24) = \alpha$, $(134) = \beta$. Тогда: $\alpha \cdot \beta = (243)$, $\alpha \cdot \beta^2 = (124)$, $\alpha \cdot \beta^3 = (13)(24)$, $\alpha^2 \cdot \beta = (134)$, $\alpha^2 \cdot \beta^2 = (143)$, $\alpha^2 \cdot \beta^3 = e$, $\beta \cdot \alpha = (142)$, $\beta^2 \cdot \alpha = (234)$, $\beta \cdot \alpha \cdot \beta = (132)$, $\beta \cdot \alpha \cdot \beta^2 = (12)(34)$, $\beta^2 \cdot \alpha \cdot \beta = (14)(23)$, $\alpha \cdot \beta \cdot \alpha = (123)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} T_G((243)) &= T_G(\alpha \cdot \beta) = T_G(\alpha) \cdot T_G(\beta), \quad T_G((124)) = T_G(\alpha \cdot \beta^2) = T_G(\alpha) \cdot T_G^2(\beta), \\ T_G((143)) &= T_G(\alpha^2 \cdot \beta^2) = T_G^2(\alpha) \cdot T_G^2(\beta), \quad T_G((142)) = T_G(\beta \cdot \alpha) = T_G(\beta) \cdot T_G(\alpha), \\ T_G((234)) &= T_G(\beta^2 \cdot \alpha) = T_G^2(\beta) \cdot T_G(\alpha), \quad T_G((132)) = T_G(\beta \cdot \alpha \cdot \beta) = T_G(\beta) \cdot T_G(\alpha) \cdot T_G(\beta), \\ T_G((123)) &= T_G(\alpha \cdot \beta \cdot \alpha) = T_G(\alpha) \cdot T_G(\beta) \cdot T_G(\alpha), \\ T_G((12)(34)) &= T_G(\beta \cdot \alpha \cdot \beta^2) = T_G(\beta) \cdot T_G(\alpha) \cdot T_G^2(\beta), \\ T_G((14)(23)) &= T_G(\beta^2 \cdot \alpha \cdot \beta) = T_G^2(\beta) \cdot T_G(\alpha) \cdot T_G(\beta). \end{aligned}$$

Следовательно, $\chi_G(e) = 9$, $\chi_G((13)(24)) = -3$, $\chi_G((14)(23)) = -3$, $\chi_G((12)(34)) = -3$, $\chi_G((123)) = 0$, $\chi_G((132)) = 0$, $\chi_G((124)) = 0$, $\chi_G((142)) = 0$, $\chi_G((134)) = 0$, $\chi_G((143)) = 0$, $\chi_G((234)) = 0$, $\chi_G((243)) = 0$. Теорема доказана.

Выводы. Пока известно очень мало о геометрических графах неабелевых групп. В данной работе мы рассмотрели одну из самых простых таких групп – группу A_4 (группу вращений тетраэдра). Геометрический граф наглядно можно описать так: граф разбивается на 3 симплекса, которые расположены под прямым углом друг к другу. Действительно, если разбить вектора графа на четверки $\{e, (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$, $\{(134), (123), (142), (243)\}$ и $\{(124), (132), (143), (234)\}$, то их линейные оболочки взаимно ортогональны, а вектора внутри каждой четверки равноудалены друг от друга в R^3 , то есть их концы расположены в вершинах симплекса. Замечательным фактом оказалось то, что функция на группе A_4 , сопоставляющая элементу x косинус угла между e и x , то есть $\cos(e, x)$, и характер геометрического представления группы G оказались пропорциональными: $\chi_G(x) = \dim V \cdot \cos(e, x)$. Этот факт пока не поддается обоснованию, но отметим, что это равенство справедливо для геометрических графов всех неабелевых групп, для которых эти графы уже известны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Штепин В.В. О геометрических представлениях циклических групп / В.В. Штепин, В.А. Беликова // Труды ИПММ НАН Украины. – Т.20. – С.196–205.
2. Гроссман И. Группы и их графы / И. Гроссман, В. Магнус. – М.: Мир, 1971.
3. Винберг Э. Б. Линейные представления групп / Э. Б. Винберг. – М.: Мир, 1970.
4. Серр Ж.-П. Линейные представления конечных групп/ Ж.-П. Серр. – М.: Наука, 1985.

УДК 551.588.7

APPLICATION OF GIS FOR INVENTORY POLLUTION SOURCES AND STORAGE SITES OF CARBON DIOXIDE

A. V. Osipova, A. V. Dvoynikov, M. V. Beskrovnaia

Introduction. Performed analysis of Ukrainian stationary sources of carbon dioxide emissions (CO₂) into the atmosphere and the geology of eastern regions leads to a number of preliminary recommendations for further scientific and technological research to be carried out to provide process of implementation of CCS technologies in Ukraine.

Keywords: CO₂ emissions, carbon capture, geological storage, geographic information system, Eastern Ukraine.

The study was carried out in the framework of the Grant No. DCI/ENV 2010/243-865 “Low-Carbon Opportunities for Industrial Regions Of Ukraine (LCOIR-UA)”, which is implemented by the Donetsk National University (Ukraine) and funded by the European Union.

The potential of Sources of CO₂ Emissions. Using the information of the 5 open databases: IEA, BELLONA, CARMA, DTEK and BIOMASS,- as well as new more data obtained directly from the thermal power plants, iron and steel, coke, cement, chemical plants and oil refineries, geographic information system(GIS) sources of CO₂ were established. The study covers five eastern regions of Ukraine (previously mentioned).

This GIS in the test mode is available on the LCOIR-UA project website and businesses can read this data about their emissions of CO₂, which are listed in network connections, and correct the data in accordance with the actual volumes of emissions of the enterprise.

Using this GIS, one can estimate the amount of CO₂ emissions from a particular company, as well as obtain data about its geographic location and other useful information about the company (5 variants of icon size of enterprises conform to the following gradation of enterprises in terms of emissions of CO₂: 1Mt/year or less, 1-4 Mt/year, 4-7 Mt/year, 7-10 Mt/year. 10 Mt/year or more).

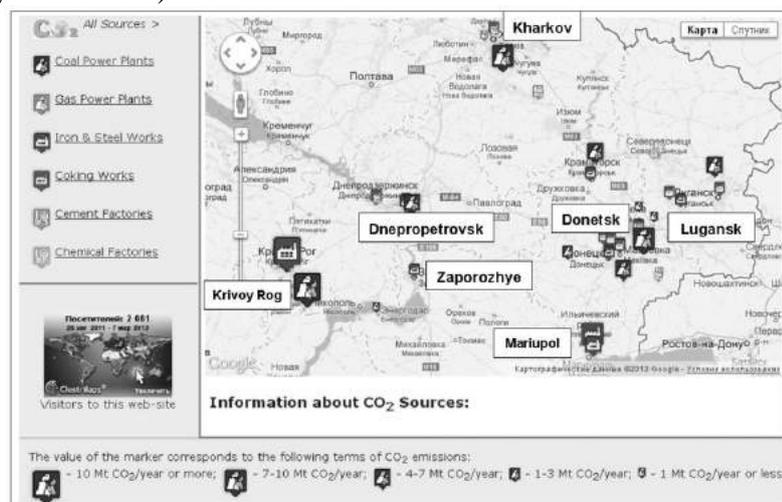


Fig. 1. GIS of CO₂ sources of emissions in eastern Ukraine.