УДК 519.813

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЭКОНОМИКЕ. ТЕОРИЯ ИГР

К. И. Синицына, Л. А. Гладкова

Резюме. В данной работе рассмотрено применение теории вероятностей в различных ситуациях. Проведен анализ экономической деятельности предприятия с использованием теории игр. Представлены математические особенности применения данной теории в азартных играх: подбрасывание монеты; кости; лотерея. Сделан вывод о полезности данного раздела теории вероятностей.

Ключевые слова: теория вероятностей, матричная игра, оптимальная стратегия, цена игры, азартные игры.

Актуальность проблемы. Каждому человеку, играющему в какую-либо азартную игру, очень хочется знать, каковы же его шансы на выигрыш. Конечно, есть интуиция, но она не всегда бывает точной и порой очень подводит, выдавая желаемое за действительное. Так, например, многие люди совершенно уверены в том, что при подбрасывании монеты после орла с большей вероятностью выпадет решка, и наоборот, хотя, понятно, что это совершенно не так.

Теория вероятностей положила начало многим разделам математики. В их числе теория игр. За этим названием скрывается сложная и важная область математики. Как игру можно рассматривать любую жизненную ситуацию, где человек в результате определённых действий теряет или приобретает что-либо. Это могут быть, к примеру, как обычные игры, так и экономическая деятельность.

Цель исследования заключается в изучении оптимальных стратегий в экономических и азартных играх.

Анализ последних публикаций. Проблематике данного вопроса уделяли внимание такие ученные как: Дж. Нейман, О. Моргнештерн, М. Одинцова, В. Смирнов и другие.

Математическая теория игр берёт своё начало из неоклассической экономики. Впервые математические аспекты и приложения теории были изложены в классической книге 1944 года Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение»

Теория игр – математический метод изучения оптимальных стратегий в играх. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу в зависимости от поведения других игроков. Теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учётом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках.

Право регулирует поведение людей в сложных ситуациях, когда в процессе их взаимодействия возникает конфликт. Этот конфликт можно представить в виде математической модели, которая называется *игрой*. В зависимости от возможности предварительных переговоров между игроками различают кооперативные и некооперативные игры. Игра называется *кооперативной*, если до ее начала игроки образуют коалиции и договариваются о своих стратегиях. Примером кооперативной игры может служить образование коалиций в парламенте при голосовании.

Игры, в которых каждый участник действует независимо от других и заинтересован в достижении наиболее благоприятного результата для себя при заданных правилах игры и существующих ограничениях, называются *некооперативными.* В некооперативных играх, даже если все участники взаимодействия выбирают такие варианты поведения, при которых достигается кооперация, они делают это только потому, что каждому из них это становится выгодным.

Каждая игра, описывающая конфликт при взаимодействии людей, должна содержать следующие составляющие:

– множество участников взаимодействия, или игроков (игрокам можно присваивать номера или имена);

– описание возможных действий каждого из игроков, которые называются стратегиями;

– набор выигрышей, которые получают игроки при каждом возможном исходе.

В теории игр предполагается, что выигрыши, которые получает каждый игрок, и стратегии, доступные им, известны всем игрокам, то есть каждый игрок знает свои возможные стратегии и выигрыши и ему также известны стратегии и выигрыши другого игрока. На основе этой информации каждый игрок решает, какую стратегию выбрать. Цель каждого игрока — добиться максимального выигрыша (или минимального проигрыша), то есть каждый игрок обнаруживает признаки «человека экономического», который действует в своих собственных эгоистических интересах и максимизирует собственное благосостояние [1, с. 64].

Выигрыш каждого из игроков зависит от того, какую стратегию выбрал этот игрок, а также от стратегии другого игрока. Такие игры называются матричными. Зависимость выигрышей игроков от выбранных ими стратегий описывается *матрицей выигрышей*. Строки этой матрицы — это возможные стратегии первого игрока, а столбцы — возможные стратегии второго игрока. В каждой клетке матрицы располагаются пары выигрышей, которые определяются соответствующими стратегиями игроков. Выигрыш первого игрока зависит не только от того, какую стратегию выбрал он сам (от номера строки), но также и от того, какую стратегию выбрал второй игрок (от номера столбца). До того момента, когда взаимодействие действительно произойдет, игроки не знают точную величину своего выигрыша, то есть игроки осуществляют выбор в условиях неопределенности.

Решение подобных задач требует полной определенности в формулировании их условий (*правил игры*); установления количества игроков, выявления возможных стратегий игроков, возможных выигрышей (проигрыш понимается как отрицательный выигрыш). Важным элементом в условии игровых задач является *стратегия*, то есть совокупность правил, которые в зависимости от ситуации в игре определяют однозначный выбор действий данного игрока. Если в процессе игры игрок применяет попеременно несколько стратегий, то такая стратегия называется *смешанной*, а ее элементы – *чистыми* стратегиями. Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным и бесконечным, в зависимости от этого игры подразделяются на *конечные* и *бесконечные*.

Важными являются понятия *оптимальной стратегии*, *цены игры, среднего выигрыша*. Эти понятия находят отражение в определении *решения* игры: стратегии P^* и Q^* первого и второго игрока соответственно называются их *оптимальными стратегиями*, а число V – *ценой игры*, если для любых стратегий P первого игрока и любых стратегий Q выполняются неравенства:

$$M\,(P,Q^*) \le V \le M\,(P^*,Q)$$

где M (P,Q) означает математическое ожидание выигрыша (средней выигрыш) первого игрока, если первым и вторым игроками избраны соответственно стратегии P и Q.

Существует ряд методов решения матричных игр. Если матрица игры имеет одну из размерностей, равную двум (у одного из игроков имеется только две стратегии), то решение игры может быть получено графически. Известно несколько методов приближенного решения матричной игры, например, метод Брауна. Во многих игровых задачах в сфере экономики неопределенность вызвана не сознательным противодействием противника, а недостаточной осведомленностью об условиях, в которых действуют стороны. [2, с. 91]

Одним из решений матричных игр может быть нахождение равновесия по Нэшу, то есть такого набора стратегий (по одной для каждого игрока), при котором ни один из игроков не имеет стимула в одностороннем порядке поменять свою стратегию: узнав о выборе другого игрока, каждый из них остается довольным своим выбором.

Рассмотрим, например, ситуацию с двумя универмагами. Каждый из их владельцев должен ответить для себя на вопрос: сохранить ли ему прежнюю нормальную цену или же повысить ее до размеров монопольной, попытавшись тем самым получить сверхприбыль. В этом случае речь идет о так называемой конкурентной игре.

Чтобы лучше понять, в чем суть такой игры, обратимся к рис. 1.

		Цена «Попова»			
		Высокая цена		Нормальная цена*	
Цена «Сидоренко»	Высокая цена	A	200 руб.	B	150 руб.
		100 руб.		-20 руб.	
	Нормальная цена*	C	-30 руб.	D*	10 руб.
		150 руб.		10 руб.	

Рис. 1. Следует ли дуополисту устанавливать монопольную цену?

*- Равновесие по Нэшу

Фирмы имеют возможность отказаться от всяких попыток нарушить установившееся равновесие, сохраняя нормальные цены. Но они могут также попытаться поднять свои цены, чтобы получить монопольную прибыль. Для начала обратим внимание на то, что максимум общей прибыли достигается в ячейке А. При таком исходе магазины будут зарабатывать в совокупности 300 руб. Поведение фирм, назначивших высокие цены (ячейка А), не будет отличаться от действий монополии. Но фирмы могут избрать и противоположную линию поведения, назначив нормальные цены. Фирмы будут зарабатывать по 10 руб., и этот исход будет в большой степени напоминать результат деятельности конкурентного рынка.

Промежуточное положение между рассмотренными стратегиями занимают еще два возможных образа поведения. К примеру, ячейка А представляет случай, когда Попов назначает высокую цену, а Сидоренко решил подставить ему ножку, придерживаясь прежней цены. Сидоренко остается в большом выигрыше, заняв лидирующее положение на рынке, в то время как Попов терпит убытки. В ячейке В Сидоренко отважился на высокую цену, однако более спокойное поведение Попова обходится ему явными потерями.

В этой конкурентной игре Сидоренко имеет доминирующую стратегию, поскольку ему выгоднее всего держаться нормальной цены. А вот у Попова нет доминирующей стратегии: если Сидоренко назначает нормальную цену, то и Попову следует назначить нормальную, а если же Сидоренко изберет высокую цену, то для Попова будет разумнее поступить так же. Перед Поповым стоит интересная дилемма. Он может поставить на высокую цену, рассчитывая, что Сидоренко сделает то же самое. Но он может избрать и нормальную цену. Если мы внимательно разберем все имеющиеся у Попова возможности, то станет ясно, что ему следует назначить нормальную цену. Несложно понять, почему. Поставим себя на место главы Попова.

Известно, что Сидоренко не смотря на то какую бы стратегию ни избрал Попов, скорее всего выберет нормальную цену. Из нее-то и должен исходить Попов. Следовательно, Попов должен назначить нормальную цену.

В итоге игроки придут к достаточно распространенной ситуации, которая называется равновесием по Нэшу. Равновесие по Нэшу возникает, когда ни один из игроков не может улучшить своего положения, если его противники не изменят своих стратегий. То есть, если игрок А сохраняет свою стратегию, то игрок В не может выбрать стратегию, которая улучшила бы его положения, и то же самое относится к игроку А. Стратегия каждого игрока является лучшим ответом на стратегию его противника.

В условиях конкурентной игры каждая фирма может получить по 10 руб., придерживаясь нормальной цены. Если оба соперника повысят свои цены до монопольного уровня, то общая прибыль будет максимальной. Однако поскольку каждая фирма будет испытывать в этом случае большое искушение сплутовать и повысить свою прибыль, то, скорее всего, фирмам не удастся вступить в сговор и они окажутся в равновесии по Нэшу.

Нетрудно убедиться, что исход, обозначенный звездочкой (рис. 1), является равновесием по Нэшу. В самом деле, ни Попову, ни Сидоренко не могут выбрать лучшей стратегии, чем сохранение нормальной цены. Если Сидоренко решит назначить высокую цену, то вместо прибыли в 10 руб. он получит ущерб в 20 руб. Если же Попов попробует покинуть равновесие по Нэшу, то его убыток составит 30 руб. вместо прежних 10 руб. прибыли.

Разработанная Нэшем схема – универсальна, так как рассматривает общие принципы взаимодействия объектов и принятия решений в различных ситуациях. Основываясь на этих принципах, ученый смог предсказать действия правительства СССР во время «холодной войны» и даже колебания котировок на бирже. В конце 20 века теорию игр стали успешно применять и в азартных играх казино. Просчет поведенческих реакций соперников и стратегии ставок пригодились и в покере и в игровых автоматах. Наиболее часто используемыми стратегиями стали:

1. Принятие решений в условиях определенности – когда игрок владеет полной информацией о соперниках и может предсказать их поведение. Очень часто эта стратегия применяется в блэкджеке – после нескольких партий опытный игрок уже имеет представление о картах на руках у дилера, у соперников и своих картах. Таких игроков нередко называют «счетчиками» – обладая хорошей памятью и математическими способностями, они принимают решение о том, повышать ли ставки или пасовать в зависимости от известных им фактов. Используется эта стратегия и в покере – опытные игроки к середине турнира буквально читают карты по лицам соперников.

2. Принятие решения в условиях высокой степени риска. Обычно эта стратегия применяется на спортивных ставках и тотализаторе. При относительно равных шансах соперников в игре ставка осуществляется на ту команду или спортсмена, который в случае выигрыша принесет больше денег.

3. Принятие решений в условиях неопределенности. При игре в игровые автоматы или рулетку, азартный игрок не может предсказать выигрышную комбинацию, так как не обладает достаточным количеством статистических данных. При недостатке информации игрок может опираться в расчетах на свое желание выиграть, на количество денег, которые он готов потратить на игру и, например на время которое он может потратить на игру. Логически правильно расставив приоритеты, игрок создает что-то на подобии матрицы принятия решений, при помощи которой и можно совершить оптимальный выбор. [3]

Конечно, внешняя сложность и огромное количество математических матриц, применяемых для расчетов в азартных играх, до сих пор пугает многих. Однако, следует понимать, что решения Нэша вполне логичны и обоснованы с точки зрения здравого смысла – нет необходимости разбираться в математических формулах – нужно лишь уловить суть. Во всех азартных играх действуют схожие принципы. Две основные цели, которые ставит перед собой игрок – выиграть максимальную сумму и не проиграть при этом слишком много. Стоит всегда помнить, что шансы на успех растут в том случае, когда ставка не является просто случайной, а продумана и взвешена. Можно это доказать. Алгоритм включает четыре ситуации: выигрыш в N последовательных испытаниях, проигрыш в N последовательных испытаниях, проигрыш не во всех N последовательных испытаниях, выигрыш среди N последовательных испытаний.

Предположим, что играют в 3-х цифровую лотерею (например, "Лото Тройка" УНЛ). В этой игре всего имеется 1000 комбинаций. Таким образом, для любой конкретной комбинации из трех цифр вероятность выпадения 1 к 1000 (это записывается как 1/1000). Все комбинации имеют равную вероятность выпадения. Важно также, (хотя это противоречит общепринятым представлениям), что прошлые результаты следует учитывать в любой игре с элементами случайности. Ясно, что комбинации имеют одинаковую вероятность, но выпадают они с различными частотами.

Если выбираем комбинацию для игры (например 2-6-4), не можем избежать вопроса: "Сколько тиражей нужно сыграть, чтобы быть уверенными на 99.9%, что выпадет комбинация имеющая вероятность выпадения в одном тираже 1/1000?"

В этом вопросе есть три параметра:

- степень уверенности, что событие произойдет, обозначенная C
- вероятность события, для одного испытания, обозначенная p
- количество испытаний или тиражей, обозначенное N

Ответ на такие вопросы, определяется математическим выражением (логарифмическим), которое имеет название Основная Формула Азартных Игр (Fundamental Formula of Gambling, FFG):

$$N=\frac{\log(1-C)}{\log(1-p)}$$

Основная Формула Азартных Игр имеет совершенно реальную и практически важную связь с явлениями в азартных играх. Фактически, FFG применима к любой игре с высокой степенью случайности: лотерее, рулетке, блэкджеке, скачках, спортивных пари и даже в биржевой игре. Напротив то, что называют теория игр, есть форма нечеткой математики: формулы просто нечетко связаны с реальной жизнью.

Заменяя C и p различными значениями, и выполняя вычисления по формуле получим следующую таблицу1, имеющую большое значение.

Количество испытаний N необходимое, чтобы событие имеющее вероятность p случилось со степенью уверенности C

Таблица 1

Таблица азартных игр

C Ï	**10%**	**25%**	**50%**	**75%**	**90%**	**95%**	**99%**	**99.9%**
p=1/2	-	-	1	2	3	4	7	10
p=1/6	-	1	3	7	12	16	25	37
p=1/1000	105	287	692	1385	2301	2994	4602	6904

Строка со значением p=1/2, которая соответствует игре с бросанием монеты. В этой игре два возможных исхода: выпадение монеты "гербом" или "решкой" вверх.

Таким образом, вероятности для каждого из этих событий р = 1/2. Посмотрите на столбец 50%: в нем стоит число 1. Это значит, что требуется одно испытание (бросание монеты), чтобы иметь шансы "50 на 50". Еще нагляднее: предположим, ставят на герб. Шансы, что он выпадет в первом броске равны 50%. Для десяти бросков, степень уверенности в том, что герб выпадет хоть раз, увеличиваются до 99.9%. Даже эта простейшая игра может приводить к заметным убыткам. Допустим ставка $2 при первом броске. Имеется 50%-й шанс, что будет проигрыш. Тогда ставим $4, чтобы вернуть проигрыш и выиграть $2. Затем ставим $8, чтобы вернуть проигрыш и выиграть $2. Нам придется сыграть 9 игр, чтобы быть на 99.9% уверенным в появлении герба. Поскольку первая ставка $2, и каждый раз удваиваем до 9-го броска, на девятом броске ставка будет два в девятой степени то есть $512. Получается нужно $512, чтобы с очень большой надежностью (99.9%) выпал герб и выиграть $2! Фактически могло быть и еще хуже: могло потребоваться 10 или 11 бросков до выпадения герба. Эта опасная стратегия игры называется "мартингейл" Обычно все же наблюдается хотя бы одно выпадение герба за 3-4 броска (степень уверенности 90-95%). Так что эта игра не слишком опасна для игрока, имеющего несколько тысяч долларов в запасе. Соответственно, ни одно казино в мире не станет проводить такую игру. Любое казино с гарантией разорилось бы при этом за несколько месяцев. Им необходим еще так называемый "процент заведения" или "процентное преимущество". Этот фактор обеспечивает более долгие периоды проигрыша игрока, и больше выигрышей заведению. Кроме того казино устанавливают пределы максимальных ставок: игрокам не позволяется удваивать ставки бесконечно.

Игральные кости более сложная игра, результаты для нее приведены в строке р=1/6. Допустим, сделана ставка на выпадение тройки. Чтобы иметь степень уверенности 50% что выпадет тройка потребуется три бросания кубика. А чтобы быть уверенным на 99.9% что хоть раз выпадет тройка, кубик придется бросить 37 раз. Если играть по такой же стратегии, как в предыдущем случае, то нужен был бы капитал равный 2 в 37 степени! Это уже большая сумма.

Строка р=1/1,000 соответствует хорошо известной 3-цифровой лотерее. Она очень популярна и предполагается, что в нее легко выиграть. К сожалению, большинство игроков очень плохо представляют себе ее математику. Допустим выбираем комбинацию 2-1-4 и будем ставить на нее каждый тираж. Имеется лишь 10% шанс (степень уверенности С) что эта комбинация выпадет хоть раз за следующие 105 тиражей! Степень уверенности 50% в появлении комбинации достигается только за 692 тиража! И комбинация вполне возможно не появится, пока не сыграем 692 тиража. Так что затраты составят $692 и возможно выиграем $500. Если бы государственные лотереи хотели бы быть честными со своими клиентами, они должны были бы платить $690 или $700 за $1 выигрышный билет. Именно здесь проходит граница шансов 50-50. Во многих случаях ситуация еще хуже. Возможно придется играть на заданную комбинацию 4 602 игры пока наконец не получим выигрыш. Почти наверняка наша комбинация выпадет за 4 602 или 6 904 тиража. Случай из реальной жизни: Государственная Лотерея Пенсильвании провела 6 400 тиражей 3-цифровой лотереи. И комбинация 2-6-4 до сих пор не выпала.

Все результаты розыгрышей лотерей подтверждают теорию вероятностей и формулу азартных игр. Почти наверняка (с вероятностью 99.5-99.9%) комбинация 2-6-4 выпадет в течении следующих 400-500 тиражей в Пенсильванской лотерее. Хотя 100% гарантии нет, нет даже... 99.99%! [4]

Нет смысла анализировать числовые лотереи с большим количеством номеров. Достаточно просто умножить значения последнего столбца на 10 000 чтобы получить примерную оценку. Чтобы иметь 99.9% уверенность в выигрыше в лотерее с 6 номерами нужно сыграть 69 миллионов тиражей подряд. Если в год проводится 100 тиражей, то на это потребуется более 690 000 лет.

Вывод. Данный раздел теории вероятности является чрезвычайно полезным (для экономистов и любителей риска) инструментом анализа ситуаций, при которых небольшое число людей хорошо информировано и пытается перехитрить друг друга на рынках или в азартной игре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Одинцова М.И. Институциональная экономика: пособ. для студ./ М.И. Одинцова. — М.: ГУВШЭ, 2007. — 386 с.
2. Смирнов В.В. Математическое моделирование: конс. лек. для студ./ В.В. Смирнов. — Алт. гос. тех. ун-та, 2006. — 103 с.
3. Теория игр и ее применение в гэмблинге [Электронный ресурс] / / [Персональная страница А. Миронова] – Режим доступа: http://playfaraon.com/gambling-theory (22. 05. 13).
4. Ion Saliu, Mathematical Analyses of Gambling and Lottery — Probability, Odds, House Edge, Integrity, Fraud, Law, Protection [Электронный ресурс] : http://saliu.com/more.htm (26.08.06).

УДК 330.59

УРОВЕНЬ И КАЧЕСТВО ЖИЗНИ НАСЕЛЕНИЯ В РЕГИОНАХ УКРАИНЫ

К. И. Синицына, В. А. Кучко

Резюме. В данной работе рассмотрена одна из важнейших социальных проблем – уровень благосостояния населения Украины. Представлена динамика показателей индекса человеческого развития в государстве. Проведен анализ уровня жизни в регионах страны в 2010 – 2011 годах. Сделан вывод о том, что в настоящее время все сложнее становится регулировать условия жизни населения.

Ключевые слова: регион, уровень жизни, качество жизни, индекс человеческого развития, система показателей, рейтинг регионов.

Актуальность проблемы. На современном этапе развития экономики любой страны, проблемы уровня жизни населения становятся очень важными. Решение социальных проблем гарантирует дальнейшие преобразования в стране, политическую стабильность и экономическую эффективность в обществе. Среди приоритетов государства социальная политика занимает одно из ведущих мест по нескольким причинам.

Первая причина заключается в том, что население любой страны менее обеспокоено проблемами макроэкономики, гражданам важнее знать, где работать, как лечиться, как учить детей, сколько будут стоять товары и услуги, какой будет пенсия. Поэтому вопросы социальной политики являются определяющими в экономических программах партий любых государств. Вторая причина основывается на том, что в XXI веке для расширенного воспроизводства нужна отличного качества рабочая сила, которую можно получить только лишь при достаточно высоком уровне жизни населения, доступе к качественному образованию и медицинскому обслуживанию. Третья причина – общий процесс гуманизации общества в последние десятилетия, когда человек стал его главным достоянием и ценностью.

Цель исследования состоит в проведении анализа уровня и качества жизни населения в регионах Украины.

Анализ последних публикаций. Исследованием качества жизни населения уделяли внимание такие ученые, как Бушуев В.В., Голубев В.С., Маслова Л.Я., Щербина Н.М. и другие, но огромный интерес эта сфера исследований представляет для Организации Объединённых Наций.